RÉFLEXION QUANTITATIVE

Dans ce domaine sont testées la capacité à manier nombres et concepts mathématiques afin de résoudre des problèmes quantitatifs ainsi que la capacité à analyser des données présentées sous des formes diverses, notamment tableaux et graphiques. Les connaissances mathématiques requises sont de niveau élémentaire (programme enseigné jusqu'aux classes de 3^e et de 2^e dans la plupart des lycées d'Israël).

Toutes les questions dans ce domaine se présentent sous forme de questions à choix multiple : une question suivie de quatre propositions de réponse dont une seule constitue la réponse correcte.

Le chapitre de réflexion quantitative est composé de deux catégories de questions : questions et problèmes, et questions de déduction à partir d'un graphique ou d'un tableau.

Les '**Questions et problèmes'** portent sur une variété de sujets d'algèbre et de géométrie. Certaines questions se présentent sous la forme d'une expression numérique, d'autres sont formulées verbalement et il faut d'abord traduire le problème en termes mathématiques.

Les 'Questions de déduction à partir d'un graphique ou d'un tableau' portent sur des données fournies au moyen d'un graphique ou d'un tableau. Le graphique présente les données sous forme de diagramme ou de courbes. Le tableau présente des données ordonnées en lignes et colonnes.

Pour chaque catégorie, les questions apparaissent en général par ordre croissant de difficulté. Au début, elles sont plutôt faciles et leur résolution exige peu de temps, progressivement elles deviennent plus difficiles et demandent plus de temps.

Les figures jointes à certaines des questions ne sont pas forcément dessinées à l'échelle. Ne tirez pas de conclusions concernant la longueur d'un segment, la valeur d'un angle, etc. sur la seule base d'une figure. Cependant, lorsqu'un tracé semble droit, on peut présumer qu'il s'agit d'une droite.

En tête du chapitre apparaît une "page de formules" : cette liste comporte des instructions, des remarques et des formules diverses. Vous pourrez la consulter pendant l'examen. La "page de formules" figure également dans cette brochure, à la page 38 et en tête des chapitres de réflexion quantitative de l'examen blanc. Il est recommandé de vous familiariser avec le contenu de cette page avant l'examen.

Aux pages 3-26 vous trouverez un rappel de notions de base en mathématiques, qui reflète assez bien les connaissances sur lesquelles sont fondées les questions dans le domaine de réflexion quantitative. Cela dit, l'examen peut fort bien comporter des questions dont la résolution requiert des notions ou des formules mathématiques supplémentaires, non mentionnées dans ces pages.

Aux pages 27-43 vous trouverez des exemples des différentes catégories de questions, accompagnés chaque fois de la solution et d'une explication détaillée.

PAGE DES FORMULES

Ce chapitre comprend 20 questions.
Le temps alloué est de 20 minutes.

Ce chapitre comporte des questions et des problèmes fondés sur une réflexion quantitative. Pour chaque question, quatre réponses vous sont proposées. Choisissez la réponse correcte et indiquez son numéro à l'emplacement correspondant sur la fiche des réponses.

Remarques générales :

* Les figures jointes à certaines des questions sont destinées à vous assister pour la résolution du problème mais elles ne sont pas forcément dessinées à l'échelle. Ne tirez pas de conclusions concernant la longueur d'un segment, la mesure d'un angle ou toute autre grandeur en vous fondant uniquement sur une figure.
* Lorsqu'un tracé apparaissant sur une figure semble droit, on peut présumer qu'il s'agit d'une droite.
* Toute grandeur géométrique (côté, rayon, aire, volume, etc.) figurant comme donnée dans une question a une valeur supérieure à 0, sauf mention explicite contraire.
* Lorsque $\sqrt{a}$ $(a > 0)$ figure dans une question, il s'agit de la racine positive de a.
* "0" n'est ni un nombre positif ni un nombre négatif.
* "0" est un nombre pair.
* "1" n'est pas un nombre premier

Formules :

1. **Pourcentages :** $a\%$ de x est égal à $\frac{a}{100} \cdot x$

2. **Puissances :** Pour tout a différent de 0, et pour tout n et m entiers -
   a. $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$
   b. $a^{m+n} = a^m \cdot a^n$
   c. $a^{\frac{n}{m}} = \left(\sqrt[m]{a}\right)^n$ $\quad (a > 0,\ m > 0)$
   d. $a^{m \cdot n} = (a^m)^n$

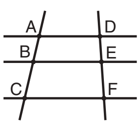
3. **Produits de binômes :**
   $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$
   $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$

4. **Problèmes de distance :** $\frac{\text{distance}}{\text{temps}} = \text{vitesse}$

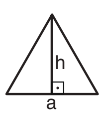
5. **Problèmes de rendement :**
   $\frac{\text{quantité de travail}}{\text{temps}} = \text{rendement}$

6. **Factorielle :** $n! = n(n - 1)(n - 2) \cdot ... \cdot 2 \cdot 1$

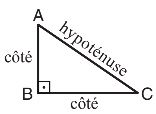
7. **Proportions :** Si $AD \parallel BE \parallel CF$
   alors $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF}$ et de même $\frac{AB}{AC} = \frac{DE}{DF}$



8. **Triangles :**
   a. **L'aire** d'un triangle dont la longueur de la base est a et dont la hauteur opposée à cette base est h vaut $\frac{a \cdot h}{2}$

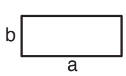


   b. **Théorème de Pythagore :**
   Dans un triangle rectangle ABC (voir figure ci-contre) s'applique la loi suivante: $AC^2 = AB^2 + BC^2$

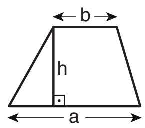


   c. Dans tout triangle rectangle dont les angles mesurent 30°, 60° et 90°, la longueur du côté opposé à l'angle de 30° vaut la moitié de l'hypoténuse.

9. **L'aire d'un rectangle** de longueur a et de largeur b est $a \cdot b$

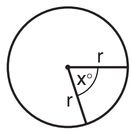


10. **L'aire d'un trapèze** de grande base a, de petite base b et de hauteur h est $\frac{(a+b) \cdot h}{2}$

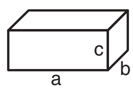


11. **Angles internes d'un polygone de n côtés :**
   a. La somme des angles est $(180n - 360)$ degrés.
   b. Dans un polygone régulier, **chaque angle interne mesure**
   $\left(180 - \frac{360}{n}\right) = \left(\frac{180n - 360}{n}\right)$ degrés.

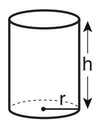
12. **Cercle :**
   a. **L'aire** d'un cercle de rayon r est πr^2 $(\pi = 3{,}14...)$
   b. **Le périmètre** d'un cercle de rayon r est $2\pi r$
   c. **L'aire d'un secteur angulaire** intercepté par un angle au centre de $x°$ est $\pi r^2 \cdot \frac{x}{360}$.



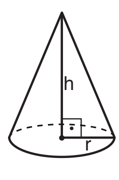
13. **Pavé (parallélépipède rectangle), cube :**
   a. **Le volume** d'un pavé de longueur a, de largeur b et de hauteur c est $a \cdot b \cdot c$
   b. **L'aire totale** du pavé est $2ab + 2bc + 2ac$
   c. Dans un **cube**, $a = b = c$



14. **Cylindre :**
   a. **L'aire latérale** d'un cylindre de rayon r et de hauteur h est $2\pi r \cdot h$
   b. **L'aire totale** du cylindre est $2\pi r^2 + 2\pi r \cdot h = 2\pi r(r + h)$
   c. **Le volume** du cylindre est $\pi r^2 \cdot h$



15. **Le volume d'un cône** de rayon r et de hauteur h est $\frac{\pi r^2 \cdot h}{3}$



16. **Le volume d'une pyramide** dont l'aire de la base est S et dont la hauteur est h est $\frac{S \cdot h}{3}$

RÉVISION DES NOTIONS DE BASE EN MATHÉMATIQUES

SIGNES

$a \parallel b$	les droites a et b sont parallèles
$a \perp b$	la droite a est perpendiculaire à la droite b
$\llcorner$	angle à 90°, c.-à-d. angle droit
$\sphericalangle ABC$	l'angle compris entre le segment AB et le segment BC
$x = y$	x est égal à y
$x \neq y$	x est différent de y
$x < y$	x est inférieur à y
$x \leq y$	x est inférieur ou égal à y
$a < x, y$	x et y sont supérieurs à a
$x = \pm a$	x peut valoir a ou -a
$\lvert x \rvert$	la valeur absolue de x
$x : y$	le rapport entre x et y

NOMBRES

Nombre entier : Nombre composé d'unités entières. Un nombre entier peut être négatif, positif ou égal à 0.
Exemple : ... , -4 , -3 , -2 , -1 , 0 , 1 , 2 , 3 , 4 , ...
Attention : 0 est un nombre entier qui n'est ni positif ni négatif.

Nombre non entier : Nombre qu'il est impossible d'exprimer en unités entières.
Exemple : 1,37 , $2\frac{1}{2}$, $-1\frac{1}{2}$, $\sqrt{2}$

Nombres consécutifs : Nombres entiers qui se suivent avec un écart de 1. Par exemple, 4 et 5 sont des nombres consécutifs, 2, 3 et 4 sont des nombres consécutifs, ainsi que (-3) et (-2).
De façon générale, si n est un nombre entier, alors n et $(n+1)$ sont des nombres consécutifs.
On a coutume de dire : $(n+1)$ est consécutif à n.

Nombre pair : Nombre entier qui, divisé par 2, donne un nombre entier (c.-à-d. un nombre divisible par 2 sans reste).
De façon générale, si n est un nombre entier, alors $2n$ est un nombre pair.
Attention : 0 est un nombre pair.

Nombre impair : Nombre entier qui, divisé par 2, donne un nombre non entier (quand on le divise par 2, il a pour reste 1).
De façon générale, si n est un nombre entier, alors $2n+1$ est un nombre impair.

Nombre premier : Nombre entier et positif qui n'est divisible sans reste que par deux nombres : par lui-même et par 1.
Exemple : 13 est un nombre premier puisqu'il ne se divise sans reste que par 1 et par 13.
Attention : 1 **n'est pas** un nombre premier.

Nombres opposés : Couple de nombres dont la somme est égale à zéro.
Exemple : 4 et (-4) sont des nombres opposés.

De façon générale, a et $-a$ sont des nombres opposés :

$(a + (-a) = 0)$, ou, en d'autres termes, $(-a)$ est le nombre opposé à a.

Nombres inverses : Couple de nombres dont le produit est égal à 1.

Exemple : 3 et $\frac{1}{3}$ sont des nombres inverses ainsi que $\frac{2}{7}$ et $\frac{7}{2}$.
De façon générale, pour a , $b \neq 0$:
a et $\frac{1}{a}$ sont des nombres inverses $\left(a \cdot \frac{1}{a} = 1\right)$ ou, en d'autres termes, $\frac{1}{a}$ est l'inverse de a

$\frac{a}{b}$ et $\frac{b}{a}$ sont des nombres inverses $\left(\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = 1\right)$ ou, en d'autres termes, $\frac{b}{a}$ est l'inverse de $\frac{a}{b}$

Valeur absolue : Si $x > 0$ alors $|x| = x$
Si $x < 0$ alors $|x| = -x$
$|0| = 0$

OPÉRATIONS ARITHMÉTIQUES AVEC NOMBRES PAIRS ET IMPAIRS

pair	+	pair	=	pair
impair	+	impair	=	pair
impair	+	pair	=	impair
pair	–	pair	=	pair
impair	–	impair	=	pair
pair	–	impair	=	impair
impair	–	pair	=	impair
pair	×	pair	=	pair
impair	×	impair	=	impair
impair	×	pair	=	pair

Ces règles ne s'appliquent pas aux opérations de division. Ainsi, le quotient de deux nombres pairs peut être un nombre impair $\left(\frac{6}{2} = 3\right)$, un nombre pair $\left(\frac{4}{2} = 2\right)$ ou un nombre non entier $\left(\frac{6}{4} = 1\frac{1}{2}\right)$.

FACTEURS (DIVISEURS) ET MULTIPLES

Un facteur (diviseur) d'un nombre entier positif est tout nombre entier positif qui divise ce nombre sans reste. Par exemple, les facteurs de 24 sont : 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12 et 24.

Un facteur commun de x et de y est un nombre qui est à la fois facteur de x et facteur de y. Par exemple, 6 est un facteur commun de 24 et de 30.

Un facteur premier est un facteur qui est également un nombre premier. Par exemple, les facteurs premiers de 24 sont 2 et 3. Tout nombre entier et positif (supérieur à 1) peut être écrit comme le produit de ses facteurs premiers. Par exemple, $24 = 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 3 \cdot 2^3$.

Un multiple d'un nombre entier x est tout nombre entier divisible par x sans reste.

Par exemple : 16, 32 et 88 sont des multiples de 8.

Quand le terme "divisible" apparaît dans une question, on entend par là "divisible sans reste".

OPÉRATIONS ARITHMÉTIQUES AVEC FRACTIONS

Simplification

Lorsque le numérateur et le dénominateur d'une fraction ont un facteur commun, on peut les diviser chacun par ce facteur et obtenir une fraction égale à la fraction initiale avec un numérateur et un dénominateur plus petits. Par exemple, si l'on divise le numérateur et le dénominateur de $\frac{16}{12}$ par 4, on obtient $\frac{4}{3}$, $\left(\frac{16}{12} = \frac{4}{3}\right)$.

Multiplication

Pour multiplier deux fractions, il faut multiplier les numérateurs l'un par l'autre et les dénominateurs l'un par l'autre.

Par exemple : $\frac{2}{3} \cdot \frac{5}{7} = \frac{2 \cdot 5}{3 \cdot 7} = \frac{10}{21}$

Division

Pour diviser un nombre par une fraction, il faut multiplier le nombre par la fraction inverse de la fraction diviseur.

Par exemple : $\dfrac{\frac{2}{5}}{\frac{3}{8}} = \frac{2}{5} : \frac{3}{8} = \frac{2}{5} \cdot \frac{8}{3} = \frac{2 \cdot 8}{5 \cdot 3} = \frac{16}{15}$

Pour multiplier ou diviser un nombre entier par une fraction, on peut considérer le nombre entier comme une fraction dont le dénominateur est 1. Par exemple : $2 = \frac{2}{1}$

Addition et soustraction

Pour additionner ou soustraire des fractions, il faut les ramener à un dénominateur commun. Un **dénominateur commun** est un nombre divisible sans reste par chacun des dénominateurs. Une fois trouvé un nombre pouvant servir de dénominateur commun, il faut "convertir" chacune des fractions en une fraction au dénominateur commun. Pour ce faire, on multiplie dans chaque fraction le numérateur et le dénominateur par le même nombre entier, de façon à obtenir le dénominateur commun choisi. Multiplier le numérateur et le dénominateur par le même nombre revient en fait à multiplier la fraction par 1 et sa valeur demeure inchangée. Après avoir mis les fractions au dénominateur commun, on peut additionner ou soustraire les numérateurs obtenus et, si c'est possible, simplifier la fraction.

EXEMPLE

$\frac{3}{4}+\frac{1}{6}+\frac{5}{8}=?$

Un dénominateur commun possible est 24, puisqu'il est divisible par chacun des dénominateurs des fractions sans reste : $\frac{24}{4}=6$, $\frac{24}{6}=4$, $\frac{24}{8}=3$

"Traduisons" chacune des fractions en une fraction ayant ce dénominateur commun :

$\frac{3}{4}=\frac{18}{24}$, $\frac{1}{6}=\frac{4}{24}$, $\frac{5}{8}=\frac{15}{24}$

Nous obtenons :

$\frac{3}{4}+\frac{1}{6}+\frac{5}{8}=\frac{18}{24}+\frac{4}{24}+\frac{15}{24}=\frac{18+4+15}{24}=\frac{37}{24}$

POURCENTAGES

Un pourcentage est une façon d'indiquer des centièmes : $a\%$ de x sont a centièmes de x, soit $\frac{a}{100}\cdot x$. Dans les questions où apparaissent des pourcentages, il faut les exprimer en centièmes et les résoudre comme on le fait pour une fraction ordinaire.

EXEMPLE

Combien font 60 pour cent de 80 ?
Au lieu de 60 pour cent, écrivons 60 centièmes et résolvons comme une multiplication ordinaire de fractions : $\frac{60}{100}\cdot 80=\frac{60\cdot 80}{100}=6\cdot 8=48$

Donc, 60% de 80 font 48.

Dans les questions qui touchent au changement de pourcentages, il s'agit du pourcentage de la valeur initiale, sauf indication contraire explicite.

EXEMPLE

Le prix d'un article qui coûtait 80 € a augmenté de 25%. Quel est son prix actuel ?
Puisqu'on a ajouté 25 % au prix initial, le prix actuel représente 125 % du prix initial (100% + 25%). C'est pourquoi il faut trouver combien font 125% de 80 €.

Posons en centièmes au lieu de pourcentages et résolvons : $\frac{125}{100}\cdot 80=100$, le prix actuel est donc 100 €.

EXEMPLE

Le prix d'un article a baissé de 15 à 12 €.
De quel pourcentage a-t-il baissé ?
Dans cet exemple, on donne le changement du prix d'un article et il faut exprimer ce changement sous forme de pourcentage. Le changement du prix est de 3 € sur 15 €. Il faut donc calculer combien représente 3 en pourcentage de 15.
Enonçons la question sous forme d'une expression mathématique : $\frac{a}{100} \cdot 15 = 3$ et résolvons l'équation : $a = \frac{3 \cdot 100}{15} = 20$. Le prix a donc baissé de 20%.

PROPORTIONNALITÉ ET RAPPORT

Le rapport entre x et y s'écrit $x : y$.

EXEMPLE

Le rapport entre le nombre de cravates de Marc et le nombre de ses chemises est 3 : 2. C'est-à-dire que pour chaque groupe de 3 cravates, Marc possède 2 chemises. On peut également l'écrire ainsi : le nombre de cravates de Marc est égal à $\frac{3}{2}$ multiplié par le nombre de ses chemises.

MOYENNE ARITHMÉTIQUE

La **moyenne arithmétique** d'un ensemble de valeurs est la somme de ces valeurs divisée par leur nombre.
Lorsqu'apparaît dans une question le terme "moyenne", il s'agit de la moyenne arithmétique.
Par exemple, la moyenne de l'ensemble des valeurs 1, 3, 5, 10 et 21 est 8 car :

$$\frac{1+3+5+10+21}{5} = \frac{40}{5} = 8$$

Si la moyenne d'un ensemble de valeurs est donnée, on peut calculer leur somme en multipliant la moyenne par le nombre de valeurs.

EXEMPLE

Daniel a acheté 5 articles dont le prix moyen est 10 €. Combien a-t-il payé pour l'ensemble des articles ?

Pour cette question, il faut trouver la somme à partir de la moyenne ; on multiplie la moyenne par le nombre d'articles : $10 \cdot 5 = 50$. Daniel a donc payé en tout 50 € pour l'ensemble des articles achetés.

La **moyenne pondérée** tient compte du poids relatif de chacune des valeurs d'un ensemble.

EXEMPLE

Pour l'épreuve intermédiaire du cours la note de Paul était 75, et pour l'épreuve finale sa note était 90. Si le coefficient de l'épreuve finale est 2 fois plus grand que celui de l'épreuve intermédiaire, quelle sera la note finale de Paul ?
L'ensemble des valeurs dans ce cas est 75 et 90, mais chacune d'elles a un coefficent différent pour la note finale de Paul. La note 75 a un coefficient de 1 et la note 90 a un coefficient de 2. Pour calculer la note pondérée, il faut multiplier chaque note par le coefficient qui lui a été affecté et diviser par la somme des coefficients : $\frac{1 \cdot 75 + 2 \cdot 90}{1+2} = 85$. La note définitive de Paul est donc 85.
Ce calcul est identique au calcul de la moyenne arithmétique ordinaire de trois nombres : 75, 90 et 90.

PUISSANCES ET RACINES

Elever un nombre à la puissance n (n est entier et positif) revient à multiplier n fois ce nombre par lui-même : $a^n = \underbrace{a \cdot ... \cdot a \cdot a}_{n \text{ fois}}$

Exemple $(-3)^3 = (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) = -27$

a^n est une puissance, n est l' "exposant" et a est la "base" de la puissance.

Un nombre non nul élevé à la puissance 0 vaut 1, c.-à-d. $a^0 = 1$ pour tout $a \neq 0$.

Une puissance avec exposant négatif revient à élever l'inverse de la base à la puissance du nombre opposé à l'exposant : $a^{-n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n = \frac{1}{a^n}$

Exemple : $2^{-3} = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$

La racine de degré n (ou racine n-ième) d'un nombre positif a, notée $\sqrt[n]{a}$, est le nombre positif b qui, élevé à la puissance n, est égal à a. Si $b^n = a$ alors $\sqrt[n]{a} = b$.

Exemple : $\sqrt[4]{81} = 3$ car $3^4 = 81$

Lorsque le degré de la racine n'est pas indiqué, il s'agit d'une racine de degré 2, appelée la racine carrée. Exemple : $\sqrt{81} = \sqrt[2]{81} = 9$

Une racine s'exprime aussi comme une puissance dont l'exposant est une fraction. Cette fraction est l'inverse de l'exposant de la racine : $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$ $(0 < a)$.

Remarque importante :

Lorsque dans une question figure $\sqrt{a}$ $(a > 0)$, il s'agit de la racine positive de a .

Règles fondamentales pour les opérations sur les puissances (pour tout n et m) :

Multiplication :

Pour multiplier des puissances de même base, on additionne les exposants : $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

Division :

Pour diviser des puissances de même base, il faut soustraire l'exposant du dénominateur de l'exposant du numérateur : $\frac{a^m}{a^n} = a^{(m-n)}$

Attention : **Lorsque les bases des puissances ne sont pas identiques, on ne peut additionner ou soustraire les exposants.**

Elever une puissance à une puissance :

Pour élever une puissance à une puissance, il faut multiplier les exposants l'un par l'autre : $(a^m)^n = a^{(m \cdot n)}$

Elever un produit ou un quotient à une puissance : $(a \cdot b)^m = a^m \cdot b^m$, $\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$

Puisque les racines peuvent également être exprimées comme des puissances, on peut appliquer les règles des puissances aux racines.

Par exemple, pour calculer le produit : $\sqrt[m]{a} \cdot \sqrt[n]{a}$ $(0 < a)$ il faut d'abord exprimer les racines comme puissances : $\sqrt[m]{a} \cdot \sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{m}} \cdot a^{\frac{1}{n}}$ et procéder ensuite comme pour le produit de puissances, en additionnant les exposants : $a^{\frac{1}{m}} \cdot a^{\frac{1}{n}} = a^{\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{n}\right)}$.

Inégalités entre puissances :

Si	$0 < b < a$	et	$0 < n$	alors	$b^n < a^n$
Si	$0 < b < a$	et	$n < 0$	alors	$a^n < b^n$
Si	$1 < a$	et	$m < n$	alors	$a^m < a^n$
Si	$0 < a < 1$	et	$m < n$	alors	$a^n < a^m$

IDENTITÉS REMARQUABLES

Pour multiplier deux sommes écrites entre parenthèses, il faut multiplier chacun des membres de la première expression par chacun des membres de la deuxième expression et additionner ensuite les produits.
Exemple : $(a + b) \cdot (c + d) = ac + ad + bc + bd$
Suivant cette formule générale, on peut résoudre tout produit de deux expressions. Pour gagner du temps, vous pouvez mémoriser ces quelques formules fréquemment utilisées :

$$(a + b)^2 = (a + b) \cdot (a + b) = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a - b)^2 = (a - b) \cdot (a - b) = a^2 - 2ab + b^2$$
$$(a - b) \cdot (a + b) = a^2 - b^2$$

COMBINATOIRES

Expérience composée :

EXEMPLE

Si on lance un dé et ensuite une pièce de monnaie, quel est le nombre de résultats possibles de cette expérience ?
Cette expérience se compose de deux étapes : lancement du dé et lancement de la pièce de monnaie.
Le nombre de résultats possibles pour le lancement du dé est égal à 6 et le nombre de résultats possibles pour le lancement de la pièce de monnaie est 2.
Le nombre de résultats possibles de l'expérience totale est $6 \cdot 2 = 12$.
Un des 12 résultats possibles est : le nombre 3 du dé et le côté "pile" de la pièce de monnaie.
En fait, peu importe si on lance le dé d'abord et la pièce de monnaie ensuite ou si on lance les deux simultanément. Dans tous les cas, il y a 12 résultats possibles.

Par la suite, nous traiterons d'une expérience composée où l'on donne un ensemble de n objets, dont on tire un objet au hasard r fois. Chaque tirage d'un objet de l'ensemble est une étape de l'expérience et elle comporte au total r étapes. Le nombre de résultats possibles à chacune des r étapes dépend du mode de tirage des objets. Le nombre de résultats possibles de l'expérience totale est le produit du nombre de résultats possibles obtenus pour r étapes. Tout résultat possible de l'expérience s'appelle **échantillon**.

Arrangements avec répétition :

Mode de tirage des objets : un objet tiré est **remis** dans l'ensemble aussitôt après avoir été tiré et **l'ordre** dans lequel les objets ont été tirés **est important.**
Nombre de résultats possibles : à chaque étape, le nombre de résultats possibles est n, c'est pourquoi le nombre de résultats possibles pour toutes les r étapes, c'est-à-dire pour l'expérience totale, est $n \cdot n \cdot ... \cdot n = n^r$.
Attention : Dans ce mode de tirage, un objet peut être tiré plus d'une seule fois.
Le nombre d'arrangements avec répétition est n^r.

EXEMPLE

Dans une boîte, il y a 9 boules numérotées de 1 à 9. On tire au hasard une boule de la boîte, on la remet et on répète ce processus encore deux fois. On inscrit le numéro des boules extraites, dans leur ordre d'extraction, de façon à obtenir un nombre de trois chiffres. Combien de nombres différents de trois chiffres peut-on obtenir de cette façon ?
Dans cette expérience, l'ordre est important : ainsi, si les numéros des boules tirées sont 3, 8 et 3 dans cet ordre, on obtient le nombre 383, mais si elles sont tirées dans l'ordre 3, 3 et 8, on obtiendra le nombre 338 et ce sont là deux nombres différents.
Le nombre d'étapes dans cette expérience est 3 et à chaque étape le nombre de résultats possibles est 9, c'est pourquoi le nombre de résultats possibles de l'expérience totale est $9^3 = 729$, c'est-à-dire qu'on peut obtenir 729 nombres différents de trois chiffres.

Arrangements sans répétition :

Mode de tirage des objets : un objet tiré **n'est pas remis** dans l'ensemble une fois qu'il a été tiré et **l'ordre** dans lequel les objets ont été tirés **est important.**
Nombre de résultats possibles : le nombre de résultats possibles à la première étape est n, le nombre de résultats possibles à la deuxième étape est $n - 1$ (car l'objet tiré à la première étape n'a pas été remis et il ne reste que $n - 1$ objets à tirer) et ainsi de suite jusqu'à la dernière étape, l'étape r, à laquelle le nombre de résultats possibles est $n-r+1$. C'est pourquoi, le nombre de résultats possibles de l'expérience totale est $n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-r+1)$.
Le nombre d'arrangements sans répétition est $n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-r+1)$

EXEMPLE

Dans une boîte, il y a 9 boules numérotées de 1 à 9. On tire au hasard 3 boules de la boîte l'une après l'autre, sans y remettre une boule déjà tirée. On inscrit le numéro des boules tirées dans leur ordre d'extraction de façon à obtenir un nombre de trois chiffres. Combien de nombres différents de trois chiffres peut-on obtenir de cette façon ?
Dans cette expérience également, l'ordre de tirage des boules est important. Cependant, contrairement à l'exemple précédent, dans cette expérience on ne remet pas une boule déjà tirée dans la boîte et c'est pourquoi le nombre de résultats possibles à la première étape est 9, à la deuxième étape 8 et à la troisième étape 7. Le nombre de résultats possibles de l'expérience totale est $9\cdot8\cdot7=504$, c'est-à-dire qu'on peut obtenir 504 nombres différents de trois chiffres.

Permutations (arrangements internes) :

Lorsqu'on produit un arrangement sans répétition de tous les n objets d'un ensemble (c'est-à-dire quand $r = n$), tout résultat possible décrit une permutation des objets : quel est le premier objet, quel est le deuxième, etc. La question est : combien y a-t-il de permutations possibles ?
Posons $r = n$ dans la formule pour l'obtention du nombre d'arrangements sans répétition et nous obtenons $n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot3\cdot2\cdot1$. Ce nombre est appelé "factorielle de n" et il est noté $n!$
Le nombre de permutations possibles de n objets est $n!$

EXEMPLE

Une grand-mère (= mamie), une mère et une fille souhaitent se ranger pour se faire prendre en photo. De combien de manières différentes peuvent-elles le faire ?
On peut désigner celle qui se tient à droite comme la première, celle qui se tient au milieu comme la deuxième et celle qui se tient à gauche comme la troisième et la question est alors de savoir combien de permutations de la mamie, de la mère et de la fille sont possibles. La mamie, la mère et la fille constituent un ensemble de trois objets, c'est pourquoi le nombre de permutations entre elles est $3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$. Détaillons les permutations possibles : mamie-mère-fille, mamie-fille-mère, mère-mamie-fille, mère-fille-mamie, fille-mamie-mère, fille-mère-mamie.

Combinaisons (échantillons non ordonnés) :

Mode de tirage des objets : un objet tiré **n'est pas remis** dans l'ensemble une fois qu'il a été tiré et **l'ordre** dans lequel les objets ont été tirés **n'est pas important.**

Lorsque l'ordre n'a pas d'importance, tous les arrangements comportant les mêmes r objets (seul l'ordre dans lequels ils sont tirés diffère pour chaque arrangement) sont considérés comme le même résultat. Le nombre de ces arrangements est en fait le nombre de permutations de r objets, c'est-à-dire r!.
Pour calculer le nombre de combinaisons possibles, on calcule le nombre de résultats possibles comme si l'ordre était important et on le divise par le nombre de permutations de r objets.

$$\textbf{Nombre de combinaisons} = \frac{\textbf{Nombre d'arrangements sans répétition}}{\textbf{Nombre de permutations de l'arrangement}} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-r+1)}{r!}$$

EXEMPLE

Dans une boîte, il y a 9 boules numérotées de 1 à 9. On tire au hasard 3 boules de la boîte l'une après l'autre, sans remettre une boule qui a déjà été tirée et on place les boules tirées dans un chapeau. Combien de combinaisons possibles de boules y a-t-il dans le chapeau ?
Dans cette question, c'est la combinaison des boules dans le chapeau qui est importante et non l'ordre dans lequel elles ont été tirées de la boîte. Par exemple, si les boules ont été tirées dans l'ordre 5, 1 et 4, la combinaison dans le chapeau est 1, 4 et 5 et ce sera la combinaison dans le chapeau même si elles avaient été tirées dans l'ordre 4, 5, et 1 ou dans chacune des 3! permutations possibles : 1-4-5, 1-5-4, 4-1-5, 4-5-1, 5-1-4 et 5-4-1 (en fait, il n'est pas du tout important de tirer les boules l'une après l'autre et on peut tout aussi bien les tirer d'un seul coup, sans que cela n'affecte le résultat).
Par conséquent, le nombre de combinaisons possibles est $\frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{3!}$, c'est-à-dire qu'il y a 84 différentes combinaisons possibles de boules dans le chapeau.

PROBABILITÉS

La théorie des probabilités est un modèle mathématique s'appliquant aux phénomènes (expériences) dont l'occurrence n'est pas certaine. Chaque résultat possible de l'expérience est appelé "événement simple" et un ensemble de résultats est appelé "événement" (pour abréger, on se servira du terme "événement" même pour un "événement simple"). On attribue à chaque événement un nombre entre 0 et 1, qui reflète la probabilité (la chance, la plausibilité) que cet événement se produise. Plus la probabilité est grande, plus il y a de chances que cet événement se produise. Lorsque l'occurrence d'un événement est certaine, sa probabilité est 1 et lorsque son occurrence est tout à fait impossible, sa probabilité est 0.
La somme des probabilités de tous les événements simples de l'expérience est 1.
Lorsque tous les n résultats possibles d'une expérience sont également plausibles, on dit qu'ils sont équiprobables.
Dans ce cas la probabilité de chaque résultat est $\frac{1}{n}$.

EXEMPLE

L'expérience : lancement d'une pièce de monnaie.
Résultats possibles : les deux côtés de la pièce de monnaie. On les désigne par 1 ou 0 (pile ou face).
Si la **pièce de monnaie est équilibrée**, les deux résultats sont équiprobables, c'est-à-dire que la probabilité que la pièce tombe sur "1" est égale à la probabilité qu'elle tombe sur "0", c'est pourquoi la probabilité de chaque résultat possible est $\frac{1}{2}$.

EXEMPLE

L'expérience : lancement d'un dé régulier.
Résultats possibles : les chiffres 1, 2 ,3, 4, 5 et 6 inscrits sur les côtés du dé.
Si le **dé est régulier**, la probabilité de chacun des résultats possibles est $\frac{1}{6}$.

Lorsque tous les résultats possibles sont équiprobables,

la probabilité d'un événement est : $\dfrac{\textbf{Nombre de résultats de l'événement particulier}}{\textbf{Total des résultats possibles de l'expérience}}$

EXEMPLE

L'expérience : lancement d'un dé régulier.

L'événement : résultat inférieur à 4

Résultats de cet événement : les nombres 1, 2 et 3.

Probabilité de l'événement : $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

EXEMPLE

L'expérience : tirage d'une boule d'un sac contenant 5 boules blanches et 5 boules noires.

L'événement : tirage d'une boule noire

Probabilité de l'événement : $\dfrac{\text{Nombre de boules noires}}{\text{Nombre total de boules dans le sac}} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$

Probabilité d'occurence de deux événements

Lorsque deux événements se produisent, parallèlement ou l'un après l'autre, deux situations sont possibles :

A. **Les événements sont indépendants,** c'est-à-dire que la probabilité d'occurence d'un événement n'est pas influencée par l'occurence de l'autre.
B. **Les événements sont dépendants,** c'est-à-dire que la probabilité d'occurence d'un événement est influencée par l'occurence d'un autre. En d'autres termes, la probabilité d'occurence d'un événement après (ou sous condition de l') occurence d'un autre événement est différente de la probabilité de cet événement (en l'absence de cette condition).

EXEMPLE

Il y a 10 boules dans un sac : 5 boules blanches et 5 boules noires. On tire 2 boules du sac, l'une après l'autre.

On sait que la première boule tirée est noire.

Quelle est la probabilité que la deuxième boule tirée soit noire également ?

(A) On remet la première boule dans le sac.
Puisque nous avons remis la boule dans le sac, le nombre de boules dans le sac n'a pas changé ni, en particulier, le nombre de boules noires.
La probabilité de tirer une deuxième boule noire est $\frac{5}{10} = \frac{1}{2}$ et elle est égale à la probabilité de tirer une première boule noire.
L'information selon laquelle la première boule était noire n'a en rien modifié la probabilité.
Autrement dit, les événements sont indépendants.

(B) On ne remet pas la première boule dans le sac.
Après avoir tiré une boule noire, il reste dans le sac 9 boules au total, dont 4 sont noires.
Donc, la probabilité de tirer une deuxième boule noire est $\frac{4}{9}$.
Cette probabilité est différente de la probabilité de tirer une première boule noire.
Autrement dit, les événement sont dépendants.

La probabilité d'occurence de deux événements indépendants (parallèlement ou l'un après l'autre) est le produit des probabilités de chaque événement séparément.

EXEMPLE

L'expérience : lancement de deux dés réguliers, un rouge et un jaune.

Signalons l'événement "obtention d'un nombre inférieur à 3 pour le dé rouge" par la lettre A.

La probabilité de l'événement A est $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

Signalons l'événement "obtention d'un nombre pair pour le dé jaune" par la lettre B.

La probabilité de l'événement B est $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

Etant donné que le résultat du lancement d'un dé n'influence pas la probabilité du résultat obtenu au lancement de l'autre dé, l'événement A et l'événement B sont indépendants.

La probabilité d'occurence de l'événement A et de l'événement B (ensemble) est donc

$$\left(\begin{matrix}\text{probabilité}\\ \text{de l'événement A}\end{matrix} \times \begin{matrix}\text{probabilité}\\ \text{de l'événement B}\end{matrix}\right)\text{, soit } \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6}.$$

Définissons deux événements dépendants A et B (dans une expérience quelconque).

La probabilité d'occurence de l'événement B à condition que l'événement A se soit produit est : $\dfrac{\textbf{Le nombre de résultats communs à B et à A}}{\textbf{Le nombre de résultats de A}}$

EXEMPLE

L'expérience : lancement d'un dé.
Quelle est la probabilité d'obtenir un résultat inférieur à 4 si l'on sait qu'on a obtenu un résultat pair ?

Signalons l'événement "obtention d'un résultat pair" par la lettre A.

Signalons l'événement "obtention d'un résultat inférieur à 4" par la lettre B.
Reformulons la question au moyen des événements : Quelle est la probabilité de B si l'on sait que (à condition que) A s'est réalisé ?
Il y a 3 résultats pour l'événement A : 2, 4 et 6.
Il y a 3 résultats pour l'événement B : 1, 2 et 3.
Mais si l'on sait que l'événement A s'est réalisé, il n'y a qu'un seul résultat possible pour B : 2.
Ou, en d'autres termes, le résultat "2" est le seul résultat commun à A et à B.

Donc, la probabilité de B si l'on sait que A s'est réalisé est $\frac{1}{3}$.

Cette probabilité est différente de la probabilité de B (sans la condition) qui est égale à $\frac{1}{2}$.

DISTANCE, VITESSE ET TEMPS

La vitesse d'un corps est la distance parcourue par ce corps par unité de temps.
La formule mettant en relation la vitesse, la distance parcourue par un corps et le temps requis pour parcourir cette distance est : $v = \frac{d}{t}$

lorsque : v = vitesse
d = distance parcourue
t = temps

A partir de cette formule, toutes les relations possibles entre distance, temps et vitesse peuvent être dérivées : $d = v \cdot t$, $t = \frac{d}{v}$

EXEMPLE

Un train a parcouru 240 km à une vitesse de 80 km/h. Combien de temps le voyage a-t-il duré ?

La question donne v (80 km/h) et d (240 km). Il faut calculer t. Etant donné que la vitesse est donnée en km/h, le temps parcouru sera calculé en heures.

Posons les données selon la formule $t = \frac{d}{v}$, $t = \frac{240}{80} = 3$.

Le voyage a donc duré 3 heures.

Les unités de mesure de deux des grandeurs déterminent les unités de mesure de la troisième grandeur.
Par exemple : Si la distance est exprimée en kilomètres (km) et le temps en heures, la vitesse sera mesurée en kilomètres par heure (km/h). Si la distance est exprimée en mètres et le temps en secondes, la vitesse sera mesurée en mètres par seconde.
On peut convertir les mètres en km et les secondes en heures et vice-versa.

Chaque km fait 1 000 mètres (1 mètre = $\frac{1}{1\,000}$ km).

Chaque heure fait 3 600 secondes qui représentent 60 minutes (1 seconde = $\frac{1}{3\,600}$ heure).

La vitesse de 1 km/h est égale à la vitesse de $\frac{5}{18}$ mètres par seconde ($\frac{1\,000}{3\,600} = \frac{5}{18}$).

La vitesse de 1 mètre par seconde est égale à la vitesse de 3,6 km/h. $\left(\frac{\frac{1}{1\,000}}{\frac{1}{3\,600}} = \frac{3\,600}{1\,000} = 3,6\right)$

RENDEMENT, TRAVAIL, TEMPS

Le rendement est la quantité de travail par unité de temps.
La formule mettant en relation le rendement, la quantité de travail et le temps requis pour effectuer le travail est : $p = \frac{w}{t}$

lorsque : p = rendement
w = quantité de travail
t = temps

A partir de cette formule, toutes les relations possibles entre rendement, quantité de travail et temps peuvent être dérivées : $w = p \cdot t$, $t = \frac{w}{p}$

EXEMPLE

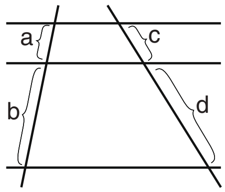
Un maçon achève la construction d'un mur en 3 heures. Combien d'heures faudra-t-il à deux maçons travaillant au même rythme pour achever la construction de 5 murs ?

La question donne la quantité de travail d'un maçon (un mur) et son temps de travail (3 heures). Son rendement est donc $\frac{1}{3}$ de mur par heure. Puisque la question porte sur deux maçons, le rendement des deux est : $2 \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$.

Est également donnée la quantité de travail exigée des deux maçons - 5 murs et l'on peut donc calculer le temps que cela leur prendra : $t = \frac{5}{\frac{2}{3}} = 5 \cdot \frac{3}{2} = \frac{15}{2} = 7\frac{1}{2}$. C'est-à-dire que cela leur prendra $7\frac{1}{2}$ heures.

DROITES PARALLÈLES (LIGNES PARALLÈLES)

Des parallèles coupant deux droites quelconques divisent ces droites en segments de longueurs proportionnelles.



Ainsi, sur la figure, $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$ et également $\frac{a}{a+b} = \frac{c}{c+d}$.

On peut trouver d'autres rapports entre les segments, en se fondant sur les rapports donnés.

ANGLES

Un angle droit est un angle de 90˚. Dans les figures, il est indiqué par le signe ⊡ .

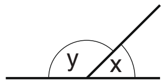
Un angle aigu est un angle de moins de 90˚.

Un angle obtus est un angle de plus de 90˚.

Un angle plat est un angle mesurant 180˚.

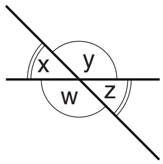
Angles supplémentaires

Deux angles sont appelés supplémentaires lorsqu'ils sont compris entre une droite et une demi-droite partant d'un point situé sur la droite. Ils forment ensemble "un angle plat" et la somme de leurs mesures est donc 180°. Par exemple, sur la figure, x et y sont des angles supplémentaires, c'est pourquoi $x + y = 180°$.

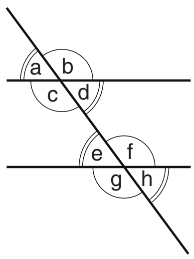


Angles opposés par le sommet

Au point d'intersection de deux droites qui se coupent, quatre angles sont formés. Les deux paires d'angles non adjacents s'appellent angles opposés par le sommet et ils ont la même mesure.
Sur la figure, x et z sont des angles opposés par le sommet et c'est également vrai pour y et w. Donc, $x = z$ et $w = y$.



Lorsqu'une droite coupe deux droites parallèles, huit angles sont formés. Soit sur la figure : a, b, c, d, e, f, g, h



Angles correspondants

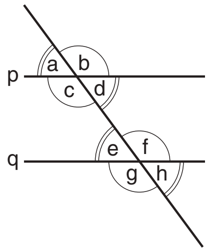
Des angles correspondants sont des angles situés du même côté de la sécante et du même côté des parallèles. Des angles correspondants ont la même mesure.
C'est pourquoi sur la figure : $a = e$, $b = f$, $c = g$, $d = h$

Angles alternes

Des angles alternes sont situés sur les côtés opposés de la sécante et sur les côtés opposés des parallèles. Des angles alternes ont même mesure.
C'est pourquoi, dans la figure ci-dessus :
$a = h$, $b = g$, $c = f$, $d = e$.

EXEMPLE

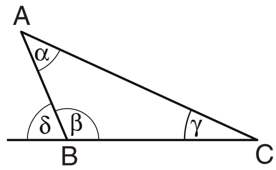
Donnée : les droites p et q sont parallèles.
$d + f = ?$
c et d sont des angles supplémentaires, donc $c + d = 180°$.
c et f sont des angles alternes, donc $c = f$.
Par conséquent, $d + f = d + c = 180°$ et la réponse est 180°.



TRIANGLES

Les angles du triangle

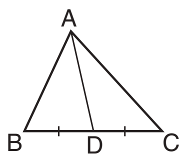
Dans tout triangle, la somme des angles internes est 180°.
Par exemple, sur la figure : $\alpha + \beta + \gamma = 180°$.



Un angle supplémentaire à un des angles du triangle s'appelle angle extérieur et il est égal à la somme des deux angles intérieurs du triangle qui ne lui sont pas adjacents. Par exemple, sur la figure, δ est l'angle supplémentaire à β, et donc $\delta = \alpha + \gamma$.

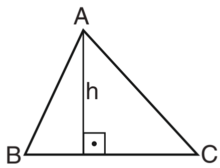
Dans tout triangle, à l'opposé d'un angle plus grand se trouve un côté plus long.
Par exemple, sur la figure, $\gamma < \alpha < \beta$. Il en découle que le côté AC (situé à l'opposé de l'angle β) est plus grand que le côté BC (situé à l'opposé de α) et que le côté BC est plus grand que le côté AB (situé à l'opposé de γ).

La médiane d'un triangle est un segment qui joint un sommet du triangle au milieu du côté opposé. Par exemple, dans le triangle de la figure, AD est la médiane du côté BC ($BD = DC$).



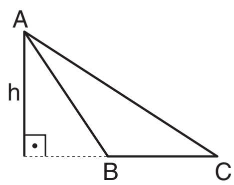
Hauteur d'un triangle

La hauteur d'un triangle est une droite passant par un sommet et perpendiculaire au côté opposé à ce sommet.
Par exemple, dans les triangles ci-contre, h est la hauteur au côté BC.



Aire du triangle

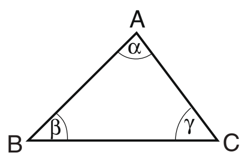
L'aire du triangle est le produit de la longueur d'un des côtés par la hauteur à ce côté divisé par 2.
Par exemple, l'aire de chacun des triangles ABC ci-dessus est $\frac{BC \cdot h}{2}$.



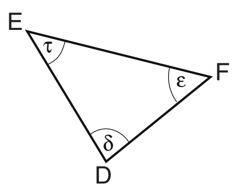
Inégalité triangulaire

Dans chaque triangle, la longueur d'un côté est strictement inférieure à la somme des longueurs des deux autres côtés.
Par exemple, dans les triangles ci-dessus : $(AB + BC) > AC$

Triangles superposables



Deux figures géométriques sont superposables lorsqu'on peut "déplacer" l'une d'elles de façon à ce que les deux figures coïncident exactement l'une avec l'autre. **Si deux triangles sont superposables**, alors leurs côtés et leurs angles respectifs sont égaux.



Par exemple, sur la figure, le triangle ABC est superposable au triangle DEF et donc : AB = DE, BC = EF et AC = DF, et de même $\alpha = \delta$, $\beta = \tau$ et $\gamma = \varepsilon$.

Chacun des quatre théorèmes suivants peut nous permettre de conclure que deux triangles sont superposables :

A. Deux triangles sont superposables lorsqu'ils ont un angle de même mesure compris entre deux côtés de mêmes longueurs. Les triangles du schéma sont superposables si AB = DE, AC = DF et $\alpha = \delta$.

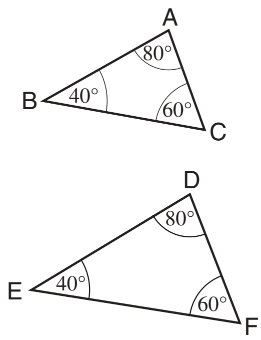
B. Deux triangles sont superposables lorsqu'ils ont un côté de même longueur compris entre deux angles de même mesure. Les triangles du schéma sont superposables si $\beta = \tau$, $\alpha = \delta$ et AB = DE .

C. Deux triangles sont superposables lorsque les longueurs de leurs côtés sont deux à deux égales.

D. Si deux côtés homologues de deux triangles sont égaux et si l'angle opposé au plus long de ces deux côtés est égal dans les deux triangles, alors les deux triangles sont superposables. Les triangles du schéma sont superposables si AB = DE, AC = DF et si $\gamma = \varepsilon$ (lorsque AB > AC et DE > DF) .

Triangles semblables

Deux triangles sont semblables si les trois angles d'un triangle sont égaux (ou superposables) aux trois angles de l'autre. Deux triangles semblables ont leurs côtés respectifs proportionnels.

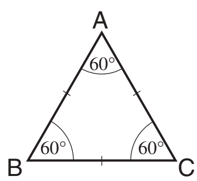


Par exemple, les triangles ABC et DEF ci-contre sont semblables et par conséquent : $\frac{AB}{AC} = \frac{DE}{DF}$

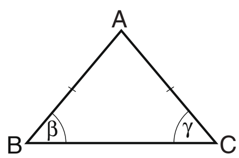
Il en découle également que : $\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF} = \frac{BC}{EF}$

Des triangles superposables sont nécessairement des triangles semblables.

TRIANGLES PARTICULIERS



Un triangle équilatéral est un triangle ayant ses trois côtés de même longueur. Par exemple, sur la figure, AB = BC = AC. Dans un tel triangle, tous les angles sont également de même mesure (60°). Si la longueur du côté d'un triangle équilatéral est a, alors sa hauteur est $a\frac{\sqrt{3}}{2}$ et son aire est $a^2\frac{\sqrt{3}}{4}$.

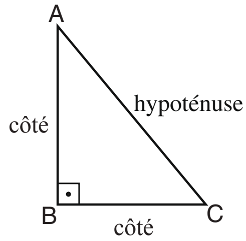


Un triangle isocèle est un triangle ayant deux côtés de même longueur. Par exemple, sur la figure, AB = AC. Le troisième côté d'un triangle isocèle s'appelle la "base".
Les angles opposés aux deux côtés de même longueur ont eux aussi même mesure. Sur la figure, $\beta = \gamma$.

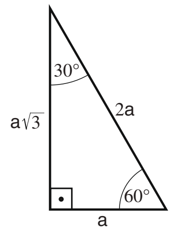
Un triangle acutangle est un triangle dont tous les angles sont aigus.

Un triangle obtusangle est un triangle dont un des angles est obtus.

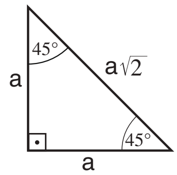
Un triangle rectangle est un triangle ayant un angle droit (90°).
Le côté opposé à l'angle droit (AC sur la figure) s'appelle "**hypoténuse**".
Selon le théorème de Pythagore, le carré de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des deux autres côtés. Ainsi, sur la figure,
$AC^2 = AB^2 + BC^2$.
Cette formule permet de trouver la longueur de tout côté, lorsque les longueurs des deux autres côtés sont données.



Dans un triangle rectangle dont les angles valent 30°, 60° et 90°, la longueur du côté opposé à l'angle de 30° est égale à la moitié de la longueur de l'hypoténuse. Ainsi, sur la figure, la longueur de l'hypoténuse est 2a et la longueur du côté opposé à l'angle de 30° est donc a.
Il découle également du théorème de Pythagore que la longueur du côté opposé à l'angle de 60° est $a\sqrt{3}$.

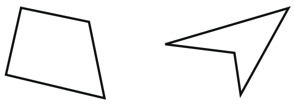


Dans un triangle rectangle isocèle, les angles valent 45°, 45° et 90° et la longueur de l'hypoténuse est $\sqrt{2}$ fois plus grande que la longueur des deux côtés égaux qui forment l'angle droit (théorème de Pythagore). Sur la figure, la longueur de chacun des côtés formant l'angle droit est a et la longueur de l'hypothénuse est donc $a\sqrt{2}$.



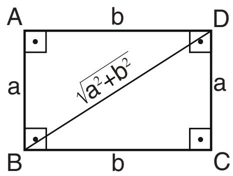
QUADRILATÈRES

Un quadrilatère est un polygone à 4 côtés. Par exemple :



RECTANGLE ET CARRÉ

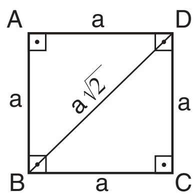
Un rectangle est un quadrilatère dont tous les angles sont droits. Dans un rectangle, les côtés opposés sont égaux deux à deux.



Le périmètre du rectangle de la figure est $2a + 2b = 2(a + b)$.

La longueur de la diagonale du rectangle de la figure est $\sqrt{a^2+b^2}$
(d'après le théorème de Pythagore).

L'aire du rectangle est égale au produit de deux cotés adjacents. L'aire du rectangle de la figure est $a \cdot b$.



Un carré est un rectangle dont tous les côtés sont de même longueur.

Le périmètre du carré de la figure est $4a$.

La longueur de la diagonale du carré de la figure est $\sqrt{a^2+a^2} = a\sqrt{2}$.

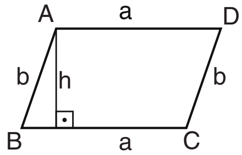
L'aire du carré est la longueur du côté portée au carré.
L'aire du carré de la figure est a^2 .

PARALLÉLOGRAMMES ET LOSANGES

Un parallélogramme est un quadrilatère dont les côtés opposés sont parallèles deux à deux et de même longueur.
Par exemple dans le parallélogramme ci-contre :

$AB \parallel DC$, $AD \parallel BC$

$AB = DC$, $AD = BC$



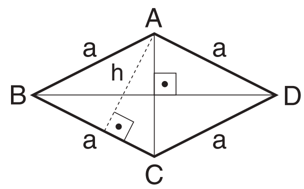
Les diagonales d'un parallélogramme se coupent en leurs milieux.

Le périmètre du parallélogramme de la figure est $2a + 2b$.
Dans un parallélogramme, une hauteur est un segment reliant deux côtés opposés (ou leurs prolongements) et qui leur est perpendiculaire.

L'aire du parallélogramme est le produit d'un côté par la hauteur de ce même côté. Ainsi, l'aire du parallélogramme de la figure est $a \cdot h$.

Un losange est un quadrilatère dont les quatre côtés ont même longueur. Dans un losange, les côtés opposés sont parallèles deux à deux et on peut donc le décrire comme un parallélogramme dont tous les côtés sont égaux.

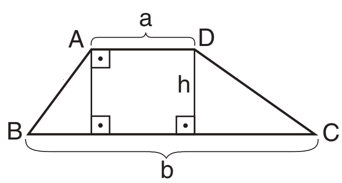
Diagonales du losange
Etant donné que le losange est un parallélogramme particulier, ses diagonales se coupent également en leurs milieux. Les diagonales du losange sont, de plus, perpendiculaires.



Le périmètre du losange représenté sur la figure est $4a$.
Aire du losange
Etant donné que le losange est un parallélogramme particulier, son aire peut elle aussi être calculée en multipliant un côté par la hauteur du même côté. Ainsi, l'aire du losange de la figure est $a \cdot h$.
L'aire du losange est aussi égale à la moitié du produit de ses diagonales.
Ainsi, l'aire du losange de la figure est $\frac{AC \cdot BD}{2}$

Trapèze

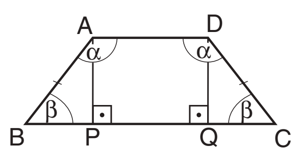
Un trapèze est un quadrilatère dont deux côtés **seulement** sont parallèles. Les côtés parallèles s'appellent "**bases**". Les bases du trapèze étant de longueur inégale, on parle de "grande base" et de "petite base". Dans le trapèze, la hauteur est un segment reliant les deux bases et perpendiculaire à celles-ci.



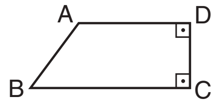
L'aire du trapèze est la moitié du produit de la somme des bases par la hauteur.

Ainsi, l'aire du trapèze sur la figure est : $\frac{h \cdot (a+b)}{2}$

Un trapèze isocèle est un trapèze dont les deux côtés non parallèles ont même longueur. Par exemple, sur la figure, $AB = DC$.
Dans un trapèze isocèle les angles adjacents à une même base sont égaux. Par exemple, sur la figure, $\sphericalangle ABC = \sphericalangle DCB = \beta$, $\sphericalangle BAD = \sphericalangle CDA = \alpha$.
Dans un trapèze isocèle, lorsqu'on trace les deux hauteurs issues des extrémités de la petite base, on obtient un rectangle et deux triangles rectangles superposables, ABP et DCQ.

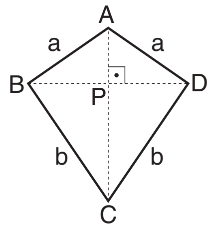


Un trapèze rectangle est un trapèze dont un des angles adjacents à la grande base est un angle droit (et bien sûr, aussi un des angles adjacents à la petite base).



"CERF-VOLANT"

(Cette figure, qui n'a pas de dénomination spécifique en français, s'appelle **"daltone"** en hébreu.) Le "cerf-volant" est un quadrilatère formé par deux triangles isocèles reliés par leurs bases. Ainsi, sur la figure, le "cerf-volant" ABCD est composé des triangles ABD et BCD, (AB = AD, CB = CD).



La diagonale reliant les sommets des deux triangles isocèles coupe la diagonale constituant la base de ces deux triangles en son milieu et est perpendiculaie à cette base. Ainsi, sur la figure, AC coupe BD en son milieu (BP=PD) et AC $\perp$ BD.

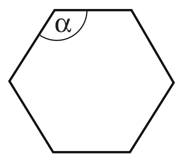
Le périmètre du "cerf-volant" de la figure est 2a + 2b.

L'aire du "cerf-volant" est égale au produit des longueurs des diagonales divisé par 2. Ainsi, l'aire du "cerf-volant" de la figure est $\frac{AC \cdot BD}{2}$

Polygone régulier

Un polygone régulier est un polygone dont tous les côtés ont même longueur et dont tous les angles internes ont même mesure.

Exemples : Un octogone régulier est un polygone régulier à 8 côtés.
Un pentagone régulier est un polygone régulier à 5 côtés.
Un carré est un polygone régulier à 4 côtés.
Un triangle équilatéral est un polygone régulier à 3 côtés.



On peut calculer la mesure de l'angle interne d'un polygone régulier à n côtés à l'aide de la formule suivante : $\alpha = \left(180^\circ - \frac{360^\circ}{n}\right) = \left(\frac{180^\circ n - 360^\circ}{n}\right)$

Par exemple, dans l'hexagone régulier de la figure, chacun des angles internes mesure 120° : $\alpha = 180^\circ - \frac{360^\circ}{6} = 120^\circ$

CERCLE, DISQUE

Le rayon du cercle est un segment reliant le centre du cercle à un point quelconque sur son périmètre.

Une corde est un segment passant par le cercle et reliant deux points différents se trouvant sur son périmètre.

Le diamètre est une corde du cercle passant par son centre. La longueur du diamètre d'un cercle de rayon r est 2r.

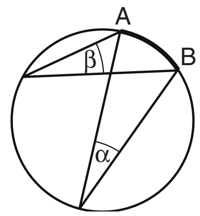
Le périmètre d'un cercle de rayon r est $2\pi r$ (π vaut approximativement 3,14).

L'aire d'un cercle (disque) de rayon r est πr^2.

Une portion du cercle délimitée par deux points sur son périmètre est appelée **arc**.

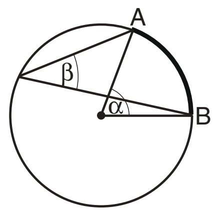
Une portion du disque délimitée entre deux rayons et un arc est appelée **secteur circulaire**.

Angle inscrit



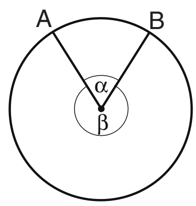
Un angle inscrit est un angle dont le sommet se trouve sur le périmètre du cercle et dont les côtés sont des cordes du cercle. Des angles inscrits interceptant le même arc ont même mesure.
Par exemple, les angles α et β sur la figure sont des angles inscrits interceptant tous deux l'arc AB et c'est pourquoi $\alpha = \beta$.
Un angle inscrit interceptant le diamètre (autrement dit un arc mesurant la moitié du périmètre) est un angle droit.

Angle au centre



Un angle au centre est un angle dont le sommet se trouve au centre du cercle et dont les côtés sont des rayons du cercle. La mesure d'un angle au centre est deux fois plus grande que celle de tout angle inscrit interceptant le même arc. Par exemple, sur la figure, l'angle au centre α et l'angle inscrit β interceptent le même arc AB, par conséquent $\alpha = 2\beta$.

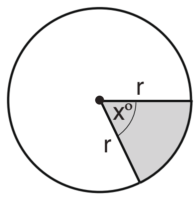
Longueur d'un arc



Deux points sur le périmètre d'un cercle délimitent deux arcs. Par exemple, sur la figure, les points A et B délimitent deux arcs, l'un correspond à l'angle α et l'autre correspond à l'angle β. L'arc le plus court AB correspond au plus petit des deux angles, α.

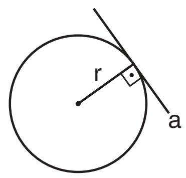
Si r est le rayon du cercle, la longueur de cet arc est égale à $2\pi r \cdot \frac{\alpha}{360}$.

Aire d'un secteur circulaire

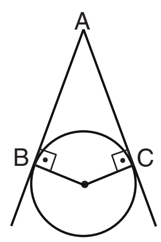


L'angle au centre compris entre les deux rayons délimitant un secteur circulaire s'appelle aussi angle d'ouverture.
Ainsi, la surface foncée sur la figure est un secteur circulaire à angle d'ouverture de x°.
L'aire du secteur circulaire est : $\pi r^2 \cdot \frac{x}{360}$.

Tangente à un cercle



Une tangente à un cercle est une droite ayant un seul point commun avec le cercle. Ce point est appelé "point de tangence".
L'angle formé au point de tangence par le rayon du cercle et la droite tangente est un angle droit.
Par exemple, la droite a de la figure est une tangente au cercle de rayon r.



Deux droites tangentes au même cercle qui se coupent en un seul point s'appellent également tangentes au cercle issues de ce point. La longueur de chacune des tangentes est égale à la longueur du segment reliant le point d'intersection des tangentes à son point de tangence sur le cercle. Les tangentes d'un cercle issues d'un même point ont la même longueur.
Ainsi, sur la figure, A est le point d'intersection, B et C sont les points de tangence, et donc AB = AC.

Polygone circonscrit

Un polygone circonscrit à un cercle est un polygone dont tous les côtés sont tangents au cercle.

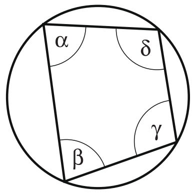
Polygone inscrit

Un polygone inscrit dans un cercle est un polygone dont tous les sommets se trouvent sur le périmètre du cercle.

Triangle inscrit

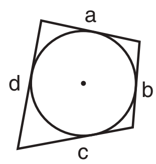
Tout triangle peut être inscrit dans un cercle.
Tout triangle ne peut être inscrit que dans un seul cercle.
Si le triangle inscrit est un triangle rectangle, le centre du cercle qui le circonscrit correspond au milieu de l'hypoténuse du triangle.

Quadrilatère inscrit

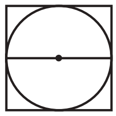


Un quadrilatère ne peut pas toujours être inscrit dans un cercle.
Pour tout quadrilatère inscrit dans un cercle, la somme des angles opposés est égale à 180°.
Ainsi, dans le quadrilatère de la figure, $\alpha + \gamma = 180°$
$\beta + \delta = 180°$

Quadrilatère circonscrit



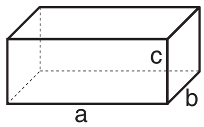
Un quadrilatère n'est pas toujours circonscrit à un cercle.
Dans un quadrilatère circonscrit à un cercle, la somme des longueurs de chaque paire de côtés opposés est égale.
Ainsi, dans le quadrilatère de la figure, $a + c = b + d$.



Lorsque le quadrilatère est un carré, la longueur du côté du carré est égale au diamètre du cercle.

FIGURES TRIDIMENSIONNELLES (SOLIDES)

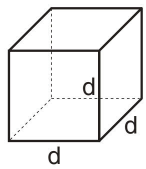
PAVÉ ET CUBE



Un pavé est un solide tridimensionnel à six faces rectangulaires. Les trois dimensions du pavé sont la longueur, la largeur et la hauteur (respectivement a, b et c sur la figure).
Chaque face du pavé est perpendiculaire aux faces adjacentes.

L'aire totale du pavé est la somme des aires de ses faces. L'aire totale du pavé de la figure est : $ab + ac + bc + ab + ac + bc = 2ab + 2ac + 2bc$.

Le volume du pavé est le produit de la longueur par la largeur et par la hauteur. Le volume du pavé de la figure est $a \cdot b \cdot c$.



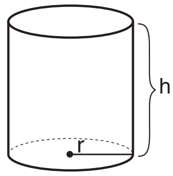
Un cube est un pavé dont les trois dimensions sont de même grandeur. Dans un cube, toutes les faces sont des carrés superposables.

L'aire de chaque face du cube est d^2, l'**aire totale** du cube est donc $6d^2$.
Le volume du cube de la figure d^3.

CYLINDRE

Un cylindre est un solide tridimensionnel dont les deux bases sont des cercles superposables situés sur des plans parallèles. La droite reliant les centres des cercles est perpendiculaire à chacune des bases.

L'aire latérale d'un cylindre de rayon r et de hauteur h est le produit du périmètre de la base par la hauteur du cylindre, donc $2\pi r \cdot h$.

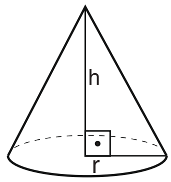


L'aire totale du cylindre est la somme de l'aire des bases et de l'aire latérale. L'aire de chaque base est πr^2 et l'aire latérale est $2\pi r \cdot h$. Donc, l'aire totale est $2\pi r \cdot h + 2\pi r^2 = 2\pi r \cdot (h + r)$.

Le volume du cylindre est le produit de l'aire de sa base multipliée par la hauteur, donc $\pi r^2 \cdot h$

CÔNE

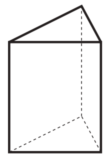
Un **cône droit** est un solide tridimensionnel formé par la liaison des points du périmètre d'un cercle quelconque avec un point situé hors du plan du cercle. Ce point s'appelle le "sommet du cône" et il est situé sur une droite passant par le centre du cercle et perpendiculaire au plan du cercle.



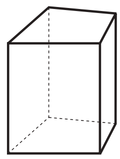
Le volume d'un cône de rayon r et de hauteur h est $\frac{\pi r^2 \cdot h}{3}$

PRISME DROIT

Un prisme droit est un solide tridimensionnel dont les deux bases sont des polygones superposables se trouvant sur deux plans parallèles et dont les faces latérales sont des rectangles.



On nomme les prismes d'après le nombre de côtés de leurs bases. Ainsi, un prisme triangulaire a pour bases deux triangles, un prisme quadrangulaire a pour bases deux quadrilatères, etc. (voir figures).



La hauteur du prisme est la longueur du segment reliant les deux bases et perpendiculaire à celles-ci. C'est la distance entre les bases du prisme.

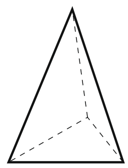
L'aire latérale du prisme est la somme des aires de toutes les faces latérales. On peut également calculer l'aire latérale en multipliant le périmètre de la base du prisme par sa hauteur.

L'aire totale du prisme est la somme de l'aire latérale et de l'aire des deux bases du prisme.

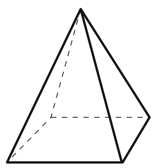
Le volume du prisme est égal au produit de l'aire d'une des bases par la hauteur.

PYRAMIDE

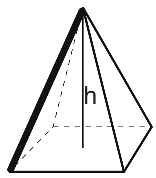
Une pyramide droite est un solide tridimensionnel formé en joignant les sommets d'un polygone quelconque avec un point situé hors du plan de ce polygone. Le polygone est appelé "base de la pyramide" et le point est appelé "sommet de la pyramide".



Les faces latérales de la pyramide sont des triangles. On nomme les pyramides d'après le nombre de côtés de leur base. Ainsi, une pyramide triangulaire a pour base un triangle, une pyramide quadrangulaire a pour base un quadrilatère, etc. (voir figures).



La hauteur de la pyramide est la longueur du segment reliant le sommet à la base et perpendiculaire à celle-ci. C'est la distance entre le sommet et la base de la pyramide (voir figure).



Si S est l'aire de la base de la pyramide et h est sa hauteur, alors

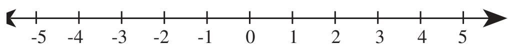
le volume de la pyramide est $\frac{S \cdot h}{3}$.

Arête

L'arête d'un solide tridimensionnel est le segment de droite formé par l'intersection de deux faces. Dans la pyramide de la figure, le segment indiqué en gras est une de ses arêtes.
Un cube possède 12 arêtes.

L'AXE DES NOMBRES

L'axe des nombres permet la représentation géométrique des rapports entre les nombres.



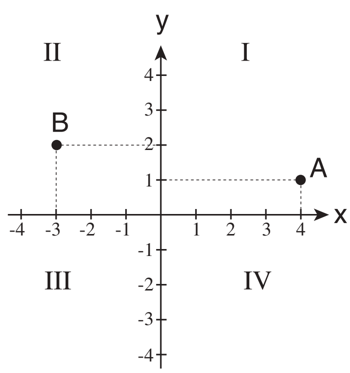
Les nombres sur l'axe vont en augmentant de gauche à droite.

La distance entre des points sur l'axe des nombres est proportionnelle à la différence des valeurs numériques correspondant à ces points.
Par exemple, la distance entre les points correspondant aux valeurs (-4) et (-2) est égale à la distance entre les points correspondant aux valeurs 3 et 5.

Repère orthonormé

Un repère orthonormé dans un plan est formé de deux axes numériques orthogonaux (perpendiculaires l'un à l'autre). L'axe horizontal s'appelle l'axe des x ou des "abscisses". L'axe vertical s'appelle l'axe des y ou des "ordonnées". Sur l'axe des x, les nombres augmentent de gauche à droite. Sur l'axe des y, les nombres augmentent de bas en haut.

Les axes divisent le plan en quatre quadrants désignés sur la figure par les chiffres romains I, II, III, IV.

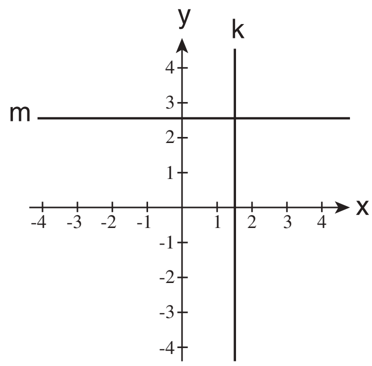


Chaque point du plan correspond à un couple différent de valeurs x et y (coordonnées du point) décrivant son emplacement par rapport aux axes.
Par exemple, sur la figure, la valeur x du point A est 4 et sa valeur y est 1. Pour le point B, la valeur x est -3 et la valeur y est 2.

Il est convenu de noter les coordonnées d'un point entre parenthèses, en mettant la valeur x à gauche de la valeur y, de la manière suivante : $(x ; y)$. Souvent on accole les coordonnées d'un point à la lettre qui le représente, par exemple $A(4 ; 1)$, $B(-3 ; 2)$.

Le point du plan correspondant aux coordonnées (0 ; 0) est le point d'intersection des axes et il est appelé "**origine**" ou **"centre des coordonnées"** du système.

Tous les points situés sur une droite parallèle à l'axe des x ont la même ordonnée et tous les points situés sur une droite parallèle à l'axe des y ont la même abscisse.

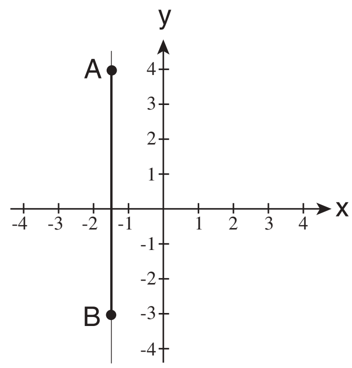


Par exemple, sur la figure :

La droite k est parallèle à l'axe des y, c'est pourquoi tous les points situés sur la droite k ont la même valeur x (x = 1,5).

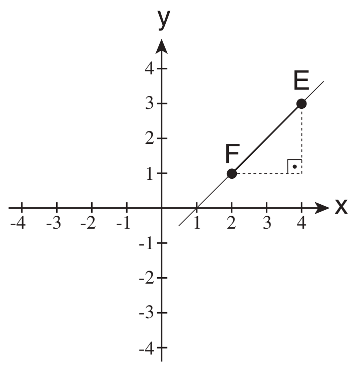
La droite m est parallèle à l'axe des x, c'est pourquoi tous les points situés sur la droite m ont la même valeur y (y = 2,5).

Entre deux points quelconques du plan passe une seule droite.
La partie de cette droite se trouvant entre les deux points s'appelle un segment.



Si le segment est parallèle à l'axe des y, sa longueur est la différence (en valeur absolue) entre les valeurs y des points.
Ainsi, sur la figure, le segment AB est parallèle à l'axe des y.
La valeur y du point A est 4 et la valeur y du point B est -3.
La différence entre les valeurs y des points est 4 – (-3) = 7, et la longueur du segment AB est donc 7.

On calcule de façon similaire la longueur d'un segment parallèle à l'axe des x.



Si le segment n'est parallèle à aucun des axes (par exemple le segment EF sur la figure), on peut calculer sa longueur à l'aide du théorème de Pythagore : on dessine un triangle rectangle ayant le segment pour hypoténuse et dont les deux autres côtés sont parallèles à l'axe des x et à l'axe des y. La longueur du côté parallèle à l'axe des x est égale à la différence des abscisses des points E et F (4 – 2 = 2), et la longueur du côté parallèle à l'axe des y est égale à la différence des ordonnées des points E et F (3 – 1 = 2).

Le théorème de Pythagore permet donc de calculer la longueur de l'hypoténuse : $EF = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8}$

QUESTIONS ET PROBLÈMES

Les questions d'algèbre portent sur une variété de sujets : équations, problèmes de distance et de rendement, combinaisons, probabilités, etc. Les questions de géométrie portent sur les caractéristiques des formes géométriques : aire, volume, angles, etc. Certaines questions sont formulées verbalement et il faut commencer par traduire le problème en termes mathématiques ; d'autres questions ne sont pas formulées verbalement et le problème y est présenté directement en termes mathématiques. Ci-dessous des exemples de questions, suivis d'une explication de la solution.

Attention : Dans cette brochure, les exemples sont groupés par catégories de questions mais dans l'examen réel il n'y a pas de regroupement semblable.

QUESTIONS D'ALGEBRE VERBALES

1. Un automobiliste voyage de Haifa à Eilat. Il franchit le tiers du parcours à une vitesse de 75 km/h, il couvre un cinquième **du reste** du parcours en une heure et la distance restante à une vitesse de 80 km/h. La distance entre Haifa et Eilat est de 450 km. Si l'automobiliste avait effectué tout le parcours à une vitesse constante, quelle aurait dû être cette vitesse pour que le voyage de Haifa à Eilat prenne exactement le même temps ?

(1) 70 km/h
(2) 75 km/h
(3) 80 km/h
(4) 90 km/h

Cette question est présentée verbalement et dans une première étape, il faudra la traduire en termes mathématiques. Définissons d'abord clairement ce qu'il faut trouver : la **vitesse** à laquelle il faut rouler pour parcourir la **distance** entre Haifa et Eilat en un laps de temps identique au **temps** mis par l'automobiliste de la question. Par conséquent, il s'agit d'une question de distance et on peut appliquer la formule mettant en relation distance, vitesse et temps : $v = \frac{d}{t}$, puisque la distance (d) est donnée, le temps (t) peut être calculé et la vitesse (v) est ici l'inconnue qu'il faut trouver.

D'après les données de la question, la distance entre Haifa et Eilat est de 450 km.

Le temps total mis par l'automobiliste pour effectuer le parcours peut être calculé ainsi :

Dans la question, le parcours est divisé en trois tronçons. Calculons le temps mis par l'automobiliste pour chaque tronçon :

A. Un tiers de la distance est **150 km** puisque $450 \cdot \frac{1}{3}$ est égal à 150.

L'automobiliste a effectué ce tronçon en **deux heures** puisque c'est le temps requis pour parcourir 150 km à la vitesse de 75 km/h $\left(\frac{150}{75} = 2\right)$.

B. Un cinquième du reste du parcours est **60 km**, puisque le parcours restant est $450 - 150 = 300$ et que $300 \cdot \frac{1}{5}$ est égal à 60 km. La question précise que l'automobiliste a parcouru ce tronçon **en une heure**.

C. La distance restante est de **240 km**, puisque $450 - 150 - 60 = 240$. L'automobiliste a effectué ce tronçon **en trois heures**, puisque c'est le temps requis pour parcourir 240 km à la vitesse de 80 km/h.

Le voyage de Haifa à Eilat a donc pris en tout 6 heures (deux heures + une heure + trois heures). On peut maintenant calculer la vitesse constante à laquelle il faut rouler pour parcourir les 450 km en **6 heures**, en insérant les données dans la formule appropriée :

$v = \frac{d}{t} = \frac{450}{6} = 75$ c'est-à-dire que la vitesse est de 75 km/h et que la bonne réponse est (2).

2. Au 10^e jour de sa vie, un éléphanteau mange 5 bonbons. A partir de cet âge, son appétit augmente et il mange chaque jour 2 fois plus de bonbons que le jour précédent.

Combien de bonbons mangera-t-il à son 14^e jour ?

(1) 40
(2) 80
(3) 100
(4) 120

Au 10^e jour, l'éléphanteau mange 5 bonbons. Puisqu'à partir de là il mange chaque jour 2 fois plus de bonbons que le jour précédent, au 11^e jour il mangera 10 bonbons ($5 \cdot 2$), au 12^e jour il mangera 20 bonbons ($5 \cdot 2 \cdot 2$) et ainsi de suite.
De façon générale, si n est un nombre entier et positif, alors au jour ($10 + n$) l'éléphanteau mangera $5 \cdot 2^n$ bonbons.
Par conséquent, au 14^e jour il mangera 80 bonbons ($5 \cdot 2^4 = 80$) et (2) est la bonne réponse.

3. Dans le cadre de son "menu affaires", un restaurant offre de choisir une de ses 3 entrées et un de ses 4 plats principaux. En plus de l'entrée et du plat principal, on peut choisir entre une soupe et un dessert.

Combien de repas différents composés de 3 plats peut-on choisir dans ce restaurant ?

(1) 12
(2) 14
(3) 18
(4) 24

Il y a **trois** choix possibles d'entrée et pour chaque entrée choisie on peut joindre un des **quatre** plats principaux proposés. Il y a donc $4 \cdot 3$ combinaisons possibles d'entrée et de plat principal. A chacune de ces 12 combinaisons, on peut joindre une soupe ou un dessert. Il y a donc en tout $2 \cdot 12$ combinaisons différentes de trois plats, soit 24 possibilités. C'est pourquoi (4) est la bonne réponse.

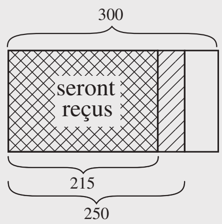
4. Un étudiant obtient la licence uniquement s'il passe toutes les épreuves et s'il présente tous les devoirs. Sur 300 étudiants, 250 ont passé toutes les épreuves et 215 ont présenté tous les devoirs.

Combien d'étudiants seront-ils titulaires de la licence ?

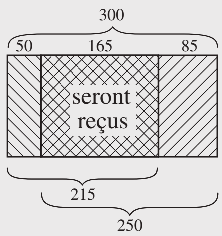
(1) 215 au moins
(2) 185 au plus
(3) 215 exactement
(4) 165 au moins

Deux groupes d'étudiants peuvent être définis : le groupe ayant passé toutes les épreuves et le groupe ayant présenté tous les devoirs. Tout étudiant appartenant aux deux groupes a droit à la licence. On ignore dans quelle mesure les deux groupes se superposent mais il y a deux cas extrêmes possibles, qu'on peut illustrer par une figure :

- En cas de **superposition maximale** entre les deux groupes, le nombre de titulaires de la licence sera maximal. Il y aura **superposition maximale si les** 215 étudiants ayant présenté tous les devoirs auront également passé toutes les épreuves. Autrement dit, 215 étudiants **au plus** obtiendront la licence.



- En cas de **superposition minimale** entre les deux groupes, le nombre de titulaires de la licence sera minimal. 50 étudiants $(300-250)$ n'obtiendront pas la licence parce qu'ils n'auront pas passé toutes les épreuves et 85 étudiants $(300 - 215)$ ne l'obtiendront pas parce qu'ils n'auront pas présenté tous les devoirs. Autrement dit, le nombre de non-titulaires pour au moins une des raisons sera de $50+85=135$. C'est là le nombre de non-titulaires maximum. Le nombre minimum de titulaires de la licence sera donc $300-135=165$. Autrement dit, 165 étudiants **au moins** obtiendront la licence.



Par conséquent, le nombre d'étudiants titulaires de la licence peut varier entre 165 et 215 et c'est pourquoi (4) est la bonne réponse.

5. Une usine fonctionnant à un rythme constant produit 20 voitures en 4 jours.

Combien de voitures peut-on produire dans 3 usines semblables, fonctionnant au même rythme pendant 6 jours ?

(1) 60
(2) 80
(3) 90
(4) 120

La question porte sur un problème de rendement. Une des façons de résoudre la question consiste à trouver le rendement d'une unité de production (dans ce cas une usine) par unité de temps (dans ce cas 1 jour) et ensuite à multiplier par le nombre d'unités de production (3 usines) et par le nombre d'unités de temps demandées (6 jours). Ainsi, si une usine produit 20 voitures en 4 jours, c'est qu'elle produit chaque jour 5 voitures ($20 : 4 = 5$). Donc, en 6 jours, 3 usines produisent $6 \cdot 3 \cdot 5$ voitures, soit 90 voitures, et la bonne réponse est (3).

6. Dans une boîte il y avait 20 chapeaux blancs et 13 chapeaux noirs. Jean a sorti au hasard 3 chapeaux de la boîte, l'un après l'autre, sans les y replacer, et tous trois étaient noirs.

Quelle est la probabilité que le quatrième chapeau sorti au hasard soit également noir ?

(1) $\frac{13}{33}$

(2) $\frac{10}{33}$

(3) $\frac{1}{3}$

(4) $\frac{1}{33}$

Vous devez calculer la probabilité que Jean sorte un chapeau noir après que trois chapeaux noirs ont déjà été retirés. Cette probabilité est égale au nombre de chapeaux noirs restant dans la boîte divisé par le total de chapeaux (noirs et blancs) restant dans la boîte.
Après que trois chapeaux noirs ont été retirés, il reste dans la boîte 10 chapeaux noirs et 20 chapeaux blancs. Donc, sur les 30 chapeaux contenus dans la boîte, 10 sont noirs. La probabilité que Jean sorte à présent un chapeau noir est donc $\frac{10}{30}$, soit $\frac{1}{3}$, et la bonne réponse est (3).

QUESTIONS D'ALGEBRE NON VERBALES

1. On donne : $2^x \cdot 2^y = 32$

$x + y = ?$

(1) 8
(2) 7
(3) 5
(4) 4

Selon les lois des puissances, pour multiplier des puissances de même base on peut additionner les exposants. C'est pourquoi $2^x \cdot 2^y = 2^{x+y}$. D'après la donnée, $2^{x+y} = 32$.
Afin de trouver la valeur de l'expression $x + y$, nous devons exprimer 32 comme une puissance de base 2 : $32 = 2^5$.
Il en découle que $2^{x+y} = 2^5$. Etant donné que deux puissances égales de même base ont aussi les mêmes exposants, on peut en déduire que $x + y = 5$. C'est pourquoi (3) est la réponse correcte.

2. La moyenne des trois nombres x, y et z est $x \cdot y$.

$z = ?$

(1) $3 \cdot x \cdot y - x - y$
(2) $x \cdot y - x - y$
(3) $3 \cdot x \cdot y + x + y$
(4) $3 \cdot x \cdot y - (x - y)$

La moyenne (arithmétique) est la somme des termes divisée par leur nombre. La moyenne de x, y et z est donc $\frac{x+y+z}{3}$.
Reportons dans l'équation les données de la question : $\frac{x+y+z}{3} = x \cdot y$, multiplions les deux membres de l'équation par 3 : $x + y + z = 3 \cdot x \cdot y$ et isolons z : $z = 3 \cdot x \cdot y - x - y$.
La bonne réponse est donc (1).

3. Pour deux nombres a et b quelconques, l'opération \$ se définit ainsi :

$\$(a , b) = a \cdot (a + b)$

$\$(\$(2 , 0), 1) = ?$

(1) 20 (2) 12 (3) 10 (4) 4

Dans l'expression $\$(\$(2 , 0), 1)$ dont il faut trouver la valeur, $a = \$(2 , 0)$ et $b = 1$.
Selon la définition de l'opération, $\$(\$(2 , 0), 1) = \$(2 , 0) \cdot (\$(2 , 0) + 1)$
Donc, pour calculer la valeur de l'expression il faut d'abord calculer $\$(2 , 0)$.
D'après la définition de l'opération, $\$(2 , 0) = 2 \cdot (2 + 0) = 4$.
Reportons la valeur obtenue pour $\$(2 , 0)$ dans l'expression recherchée et nous obtenons $\$(\$(2 , 0), 1) = \$(4 + 1)$.
D'après la définition de l'opération $\$(4 , 1) = 4 \cdot (4 + 1) = 20$ et la bonne réponse est (1).

4. On donne : $B < C$
$B < D < A$

Laquelle des expressions suivantes est nécessairement vraie?

(1) $C < D$
(2) $D < C$
(3) $C < A$
(4) aucune des expressions ci-dessus n'est nécessairement vraie

Les données ne permettent pas de déduire quoi que ce soit concernant le rapport de grandeur entre C et A ou D. Trois situations sont possibles d'après les données :

I. $B < C < D < A$
II. $B < D < C < A$
III. $B < D < A < C$

La réponse (1) est correcte dans la situation I mais pas dans les situations II et III.
La réponse (2) est correcte dans les situations II et III mais pas la situation I.
La réponse (3) est correcte dans les situations I et II mais pas la situation III.
Chacune des expressions peut donc être vraie dans certaines situations et fausse dans d'autres. C'est pourquoi aucune des expressions de (1) à (3) n'est **nécessairement** vraie et la bonne réponse est (4).

---

5. K est un nombre pair et P est un nombre impair.

Lequel des énoncés suivants **n'est pas** correct ?

(1) $P - K - 1$ est un nombre impair
(2) $P + K + 1$ est un nombre pair
(3) $P \cdot K + P$ est un nombre impair
(4) $P^2 + K^2 + 1$ est un nombre pair

Examinons chacun des énoncés :

(1) La différence entre un nombre impair (P) et un nombre pair (K) est un nombre impair. Donc, $P - K$ est un nombre impair. Si on soustrait 1 au nombre impair obtenu, on obtient un nombre pair. C'est pourquoi $P - K - 1$ est un nombre **pair** et l'énoncé **n'est pas correct**.

(2) La somme d'un nombre impair (P) et d'un nombre pair (K) est un nombre impair. Donc, $P + K$ est un nombre impair. Si on ajoute 1 au nombre impair obtenu, on obtient un nombre pair. C'est pourquoi $P + K + 1$ est un nombre **pair** et l'énoncé est **correct**.

(3) Le produit d'un nombre pair par un nombre quelconque est toujours un nombre pair et le produit $P \cdot K$ est donc un nombre pair. Si on ajoute à ce produit pair le nombre impair P, on obtient un nombre impair. C'est pourquoi $P \cdot K + P$ est un nombre **impair** et l'énoncé est **correct**.

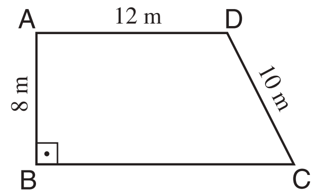
(4) Le carré d'un nombre impair (P^2) est un nombre impair, puisque c'est le produit d'un nombre impair par un nombre impair ($P \cdot P$), et le carré d'un nombre pair (K^2) est un nombre pair puisque c'est le produit d'un nombre pair par un nombre pair ($K \cdot K$). La somme des deux carrés ($P^2 + K^2$) est un nombre impair puisqu'elle est la somme d'un nombre impair et d'un nombre pair. Donc, si on lui ajoute 1, on obtient un nombre pair : ainsi, $P^2 + K^2 + 1$ est **pair** et l'énoncé est **correct**.

On demande ici d'indiquer l'énoncé qui **n'est pas correct** et la bonne réponse est donc (1).

QUESTIONS DE GÉOMÉTRIE

1. La figure ci-contre présente un trapèze rectangle ($AD \parallel BC$).
D'après ces données et celles de la figure, quelle est l'aire du trapèze (en m^2) ?

(1) 150
(2) 120
(3) 108
(4) 96



La formule pour calculer l'aire d'un trapèze de bases a et b et de hauteur h est $S = \frac{(a+b)\cdot h}{2}$.
Le trapèze donné étant un trapèze rectangle, le côté perpendiculaire aux bases est égal à la hauteur. La figure donne la hauteur et la longueur de la petite base mais ne donne pas la longueur de la grande base. Pour calculer la longueur de la grande base, traçons une verticale du point D à la base BC (DE sur la figure ci-contre). On obtient un rectangle ABED de longueur 12 m et de largeur 8 m. Pour trouver la longueur de la grande base du trapèze, il ne reste plus qu'à calculer la longueur de EC.
Pour ce faire, on peut recourir au théorème de Pythagore.
Dans le triangle rectangle DEC, $DC^2 = DE^2 + EC^2$.

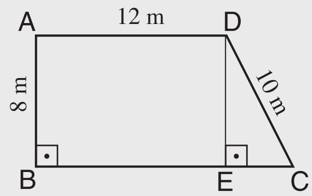
Isolons EC : $EC = \sqrt{DC^2 - DE^2}$

Reportons les données : $EC = \sqrt{10^2 - 8^2} = 6$

La longueur de la grande base est donc 18 m (6 m+ 12 m).

Calculons l'aire du trapèze : $S = \frac{(12+18)\cdot 8}{2} = 120$

L'aire du trapèze est donc 120 m^2 et la bonne réponse est (2).

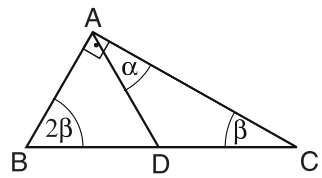


2. La figure ci-contre présente un triangle rectangle ABC et un triangle isocèle ABD (AB = AD).

D'après ces données et celles de la figure,

α = ?

(1) 60°
(2) 45°
(3) 30°
(4) 25°



La somme des angles d'un triangle est 180°. Donc l'équation 90° + 2β + β = 180° s'applique pour le triangle ABC. Résolvons l'équation et nous obtenons β = 30°.
Selon les données ABD est un triangle isocèle. Il en découle que ∢ADB = ∢ABD.
∢ABD = 2β = 60°, donc ∢ADB = 60°.
Dans le triangle ABD, ∢BAD + ∢ABD + ∢ADB = 180°. Donc, ∢BAD = 180° – ∢ABD – ∢ADB.
En posant les mesures des angles déjà calculés, on obtient ∢BAD = 180° – 60° – 60° = 60°.
D'après la figure, ∢BAD + α = ∢BAC. En posant les mesures des angles déjà connus, on obtient 60° + α = 90° et par conséquent α = 30°. La bonne réponse est donc (3).

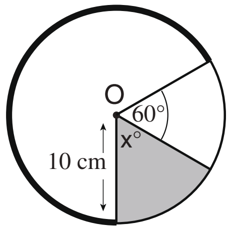
3. La figure ci-contre présente un cercle de centre O et de rayon 10 cm.
On sait que l'aire foncée vaut $\frac{1}{6}$ de l'aire du cercle.
D'après ces données et celles de la figure, quelle est la longueur de l'arc en gras (en cm) ?

(1) 30π

(2) $\frac{40\pi}{3}$

(3) $\frac{20\pi}{3}$

(4) 20π



La longueur de l'arc accentué en gras est égale au périmètre du cercle entier moins la longueur de l'arc non accentué. Pour trouver la longueur de l'arc non accentué, il faut déterminer la mesure de l'angle au centre interceptant cet arc. Cet angle mesure $x° + 60°$ (selon les données de la figure). x est l'angle au centre du secteur foncé et on peut trouver sa mesure à l'aide de la formule de l'aire du secteur circulaire : $\pi r^2 \cdot \frac{x}{360}$.
On sait que l'aire du secteur foncé vaut $\frac{1}{6}$ de l'aire du cercle, donc $\frac{\pi r^2}{6}$ (puisque l'aire totale du cercle vaut πr^2).
On obtient donc l'équation : $\pi r^2 \cdot \frac{x}{360} = \frac{\pi r^2}{6}$.
Réduisons les deux membres de l'équation par πr^2 : $\frac{x}{360} = \frac{1}{6}$. Isolons x : $x = \frac{360}{6} = 60$.

Ainsi, l'angle au centre interceptant l'arc non accentué mesure $60° + 60° = 120°$ et la longueur de l'arc intercepté par cet angle est $2\pi r \cdot \frac{120}{360} = 2\pi r \cdot \frac{1}{3}$, soit $\frac{1}{3}$ du périmètre du cercle.
Par conséquent la longueur de l'arc accentué en gras est $\frac{2}{3}$ du périmètre du cercle.

Le périmètre du cercle (en cm) est $2\pi r = 2\pi \cdot 10 = 20\pi$: c'est pourquoi $\frac{2}{3}$ du périmètre du cercle est $\frac{2}{3} \cdot 20\pi = \frac{40\pi}{3}$.

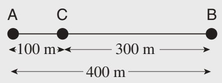
Autrement dit, la longueur de l'arc accentué est $\frac{40\pi}{3}$ cm et (2) est la bonne réponse.

---

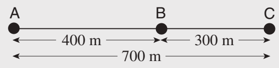
4. La distance entre les points A et B est de 400 m.
La distance entre les points B et C est de 300 m.
Il en découle que la distance entre A et C est **nécessairement** de -

(1) 100 m
(2) 500 m
(3) 700 m
(4) Les données ne permettent pas de le savoir

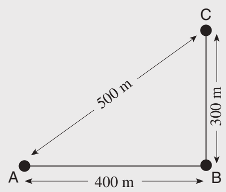
Les données de la question ne fournissent pas d'informations concernant l'emplacement relatif des trois points et de nombreuses situations sont possibles. Par exemple :



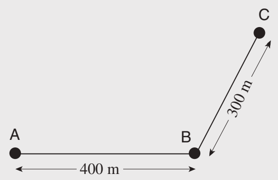
correspond à la réponse (3)



correspond à la réponse (1)



ne correspond à aucune des réponses (1)(2)(3)



correspond à la réponse (2)

Toutes ces situations sont possibles et bien d'autres encore, mais aucune d'elles n'est imposée par l'énoncé. C'est pourquoi (4) est la bonne réponse.

---

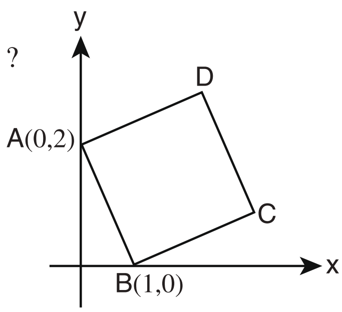
5. Soit dans le repère orthonormé ci-contre le carré ABCD.
D'après ces données et celles de la figure, quelle est l'aire du carré ?

(1) Les données ne permettent pas de le savoir

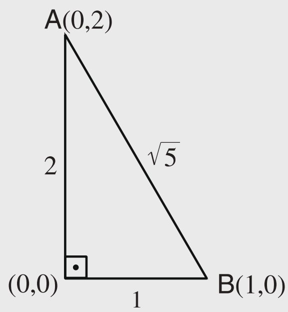
(2) 6

(3) 5

(4) 4

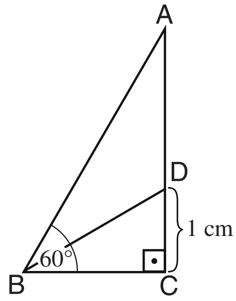


Pour calculer l'aire du carré, il faut trouver la longueur de son côté.
La longueur du côté est la distance entre deux sommets adjacents quelconques, par exemple A et B. Etant donné que le segment AB n'est parallèle à aucun des axes, calculons sa longueur au moyen du théorème de Pythagore.
L'origine des axes et les points A et B forment un triangle rectangle dont AB est l'hypothénuse. La longueur d'un des côtés est la distance entre l'origine des axes (0 ; 0) et le point A (0 ; 2), soit 2, et la longueur de l'autre côté est la distance entre l'origine des axes (0 ; 0) et le point B (1 ; 0), soit 1.
D'après le théorème de Pythagore, la longueur de l'hypothénuse AB est $\sqrt{2^2+1^2} = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}$.
Ainsi, la longueur du côté du carré est $\sqrt{5}$ et il en découle que l'aire du carré est $(\sqrt{5})^2 = 5$.
Par conséquent, la bonne réponse est (3).



6. Soit ABC un triangle rectangle. BD est la bissectrice de l'angle ABC. D'après ces données et celles de la figure,

AD = ?



(1) 1 cm

(2) 2 cm

(3) $\sqrt{3}$ cm

(4) $\frac{4}{\sqrt{3}}$ cm

La somme des angles du triangle est 180° et par conséquent $\sphericalangle BAD = 30°$. De la donnée "BD est la bissectrice de $\sphericalangle ABC$" il découle que $\sphericalangle ABD = 30°$. Dans le triangle ADB, $\sphericalangle BAD = \sphericalangle ABD$ et c'est pourquoi ADB est un triangle isocèle où AD = BD.
BD est également l'hypothénuse du triangle BDC. Ce triangle est un triangle 30°, 60°et 90° et c'est pourquoi $BD = 2 \cdot CD = 2 \cdot 1 = 2$ cm. Etant donné que AD = BD , AD = 2 cm également et la bonne réponse est (2).

7. Un liquide remplissant un pavé droit de dimensions 2 cm × 10 cm × 20 cm est versé dans son intégralité dans un récipient cylindrique dont la base fait 5 cm de rayon.
Jusqu'à quelle hauteur (en cm) le niveau du liquide arrivera-t-il dans le récipient cylindrique ?

(1) $\frac{16}{\pi}$

(2) $\frac{40}{\pi}$

(3) 8π

(4) 8

Le volume d'un pavé droit est le produit de ses trois dimensions, donc le volume du liquide dans le récipient est égal à $20 \cdot 10 \cdot 2$ cm^3, soit 400 cm^3.
Une fois versé dans le récipient cylindrique, le volume du liquide demeure le même.
A présent, il faut trouver la hauteur d'un cylindre dont le rayon de la base est 5 cm et dont le volume est 400 cm^3. C'est là la hauteur à laquelle le liquide arrivera dans le cylindre.
La formule pour le volume d'un cylindre est $V = \pi r^2 \cdot h$ et il faut trouver h en sachant que r = 5 cm, et que V = 400 cm^3.
Posons les données dans la formule de calcul du volume : $400 = \pi \cdot 5^2 \cdot h = \pi \cdot 25 \cdot h$.
Pour isoler h, divisons les deux membres par 25π et nous obtenons $h = \frac{400}{25\pi} = \frac{16}{\pi}$. La bonne réponse est donc (1).

QUESTIONS PORTANT SUR LA LECTURE D'UN GRAPHIQUE OU D'UN TABLEAU

Ces questions se réfèrent aux informations fournies par un graphique ou un tableau. Le graphique ou le tableau est généralement accompagné d'une brève explication. Le tableau présente des données ordonnées en colonnes et rangées. Le graphique présente des données à l'aide d'une courbe, d'un diagramme ou d'autres tracés. Voici à titre d'exemples un graphique et un tableau, suivis chacun de questions accompagnées d'explications.

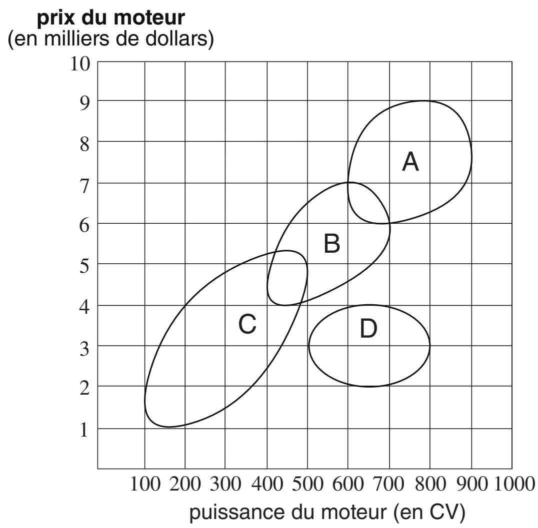
■ LECTURE D'UN GRAPHIQUE

Observez attentivement le graphique ci-dessous et répondez aux questions qui le suivent.

Le graphique ci-dessous présente quatre technologies différentes pour la production d'un certain type de moteur.

Chaque technologie est indiquée par une lettre (A à D) et représentée dans le graphique par un domaine fermé. Chaque point à l'intérieur du domaine représente la puissance et le prix du moteur qu'on peut produire au moyen de la technologie en question.
Par exemple, la technologie A permet de produire un moteur de puissance 750 CV au prix de 8 500 dollars mais il est impossible de produire un moteur de puissance similaire au prix de 5 000 dollars.

Remarque : Les technologies A et B ont une zone commune, ainsi que les technologies B et C.



Attention : Répondez à chaque question sans tenir compte des données figurant dans les autres questions.

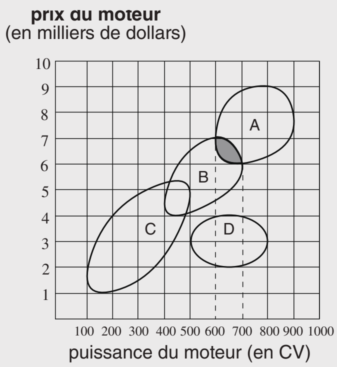
QUESTIONS ET EXPLICATIONS :

1. Quelle gamme de puissances de moteur (en CV) peut-on fabriquer tant au moyen de la technologie A qu'au moyen de la technologie B ?

(1) 400 - 500
(2) 500 - 600
(3) 600 - 700
(4) aucune des réponses n'est correcte

Afin de résoudre les questions fondées sur un graphique, il faut "traduire" la question dans les termes du graphique et ensuite y trouver l'information demandée. La question traite des moteurs qu'on peut produire par les technologies A ou B à la fois. De tels moteurs sont représentés dans le graphique par la zone commune aux domaines représentant les deux technologies (surface foncée sur la figure I). Il faut maintenant trouver la gamme de puissances de ces moteurs. Les limites de la surface foncée par rapport à l'axe horizontal représentent la gamme des puissances de moteurs qu'on peut fabriquer au moyen des deux technologies. Comme on peut le voir dans la figure, les limites se situent à 600 et 700 CV. Autrement dit, la gamme des puissances de moteur qu'on peut produire à la fois par les technologies A et B est 600 - 700 CV et la bonne réponse est (3).

Figure I

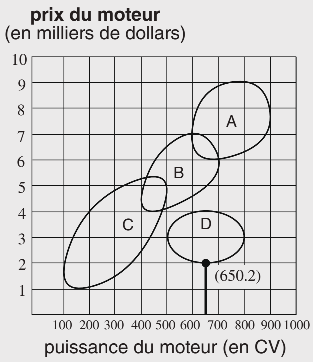


2. A quel prix minimum peut-on produire un moteur de puissance 650 CV ?

(1) 1 000 dollars
(2) 2 000 dollars
(3) 1 500 dollars
(4) 2 500 dollars

Le point de départ dans cette question est un moteur de puissance 650 CV. Les puissances sont représentées dans le graphique sur l'axe horizontal ; dans une première étape, il faut donc localiser sur cet axe la puissance recherchée et dans une deuxième étape, il faudra trouver le prix minimum d'un moteur de cette puissance. Traçons une ligne verticale à partir du point sur l'axe horizontal désignant la puissance 650 CV jusqu'à rencontrer un des domaines (voir figure II). Ce point de contact correspond au prix le plus bas possible pour un moteur de puissance 650 CV. Ce point de contact le plus bas se trouve à la limite du domaine représentant la technologie D et il correspond au prix de 2 000 dollars ; c'est donc là le prix minimum d'un moteur de la puissance souhaitée. La bonne réponse est donc (2).

Figure II

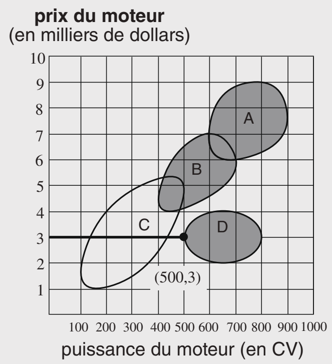


3. Dans une société produisant des moteurs, on a décidé de ne plus se servir de la technologie C. Après la mise en application de cette décision, quelle sera la puissance la plus faible (en CV) d'un moteur coûtant 3 000 dollars que cette société pourra fabriquer ?

(1) 500
(2) 400
(3) 300
(4) on ne peut produire un tel moteur

Puisque, d'après la question, la société interrompt l'usage de la technologie C, ignorons le domaine représentant cette technologie et considérons uniquement les autres domaines (surfaces foncées sur la figure III). Dans cette question, le point de départ est un moteur coûtant 3 000 dollars. Les prix des moteurs sont représentés sur l'axe vertical et il faut donc d'abord trouver le point sur cet axe correspondant au prix de 3 000 dollars. Plus on s'éloigne de ce point vers la droite, plus la puissance augmente. Donc, si on trace une ligne horizontale en partant du point sur l'axe vertical correspondant au prix de 3 000 dollars (voir figure III), le premier point de contact avec un des domaines représentera la puissance **la plus faible** possible d'un moteur de 3 000 dollars. Ce premier point de contact se situe dans le domaine de la technologie D. Il correspond sur l'axe horizontal à la puissance 500 CV et c'est là la puissance minimum d'un moteur de 3 000 dollars. La bonne réponse est donc (1).

Figure III

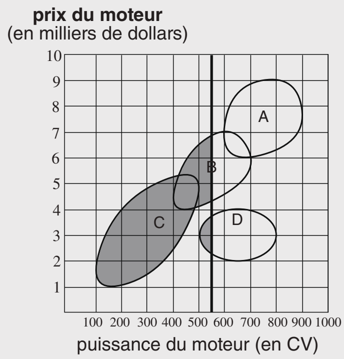


4. Une certaine entreprise n'a pas le droit de fabriquer des moteurs de puissance supérieure à 550 CV. Quelles sont les technologies que cette entreprise peut utiliser pour fabriquer ses moteurs ?

(1) C uniquement
(2) B et C uniquement
(3) C et D uniquement
(4) B, C et D uniquement

Le point de départ est un moteur de puissance 550 CV. Trouvons sur l'axe horizontal le point correspondant à cette puissance et traçons de là une ligne verticale sur toute la hauteur du graphique (voir figure IV). Tous les moteurs situés à droite de cette ligne sont de puissance supérieure à 550 CV et tous les moteurs situés à gauche de la ligne sont de puissance inférieure à 550 CV. L'entreprise dont il est question ne peut fabriquer que des moteurs de puissance inférieure à 550 CV et elle ne peut donc utiliser que les technologies dont le domaine ou une partie de celui-ci est situé **à gauche** de la ligne (surfaces foncées dans la figure IV). On trouve à gauche de la ligne tout le domaine de la technologie C, une partie du domaine de la technologie B et une partie du domaine de la technologie D. Par conséquent, l'entreprise peut utiliser les technologies B, C et D pour fabriquer des moteurs de puissance inférieure à 550 CV et (4) est donc la bonne réponse.

Figures IV



LECTURE D'UN TABLEAU

Observez attentivement le tableau ci-dessous et répondez aux questions qui le suivent.

Le tableau que voici contient des données concernant 10 sociétés opérant dans divers secteurs. Les sociétés sont représentées par les lettres A à J.
Le tableau indique pour chaque société quel est son secteur d'activité, il fournit les données sur le volume de ses ventes et sur ses bénéfices pour l'année en cours et il précise la valeur de ses avoirs et le nombre de ses employés.
Par exemple : la société E s'occupe d'électronique, elle emploie 400 000 personnes et ses avoirs se montent à 90 millions de dollars. Le volume de ses ventes se monte à 70 milliards de dollars pour l'année en cours (soit 9 % de plus par rapport à ses ventes de l'année passée) et elle a fait un bénéfice de 6 000 millions de dollars (soit 60 % de plus par rapport à ses bénéfices de l'année passée).
Exemple de calcul d'un pourcentage de variation : si les ventes d'une société donnée se montaient à 40 milliards de dollars l'année dernière et si elles ont grimpé cette année à 50 milliards de dollars, le pourcentage de variation par rapport à l'année passée est de 25% $\left(\frac{50-40}{40}\cdot 100\right)$.

		Ventes		Bénéfices			
la société	**secteur**	**ventes** (en milliards de dollars)	**pourcentage de variation par rapport à l'année passée**	**bénefices** (en millions de dollars)	**pourcentage de variation par rapport à l'année passée**	**valeur des avoirs** (en millions de dollars)	**nombre d'employés** (en milliers)
A	automobile	125	-1,5	-2 000	-150	180	750
B	pétrole	110	25	6 500	0	100	150
C	pétrole	105	22	5 000	40	390	100
D	automobile	100	1,5	900	-80	180	350
E	électronique	70	9	6 000	60	90	400
F	automobile	65	7	3 000	15	55	100
G	métallurgie	60	25	1 000	-20	pas de données	400
H	pétrole	60	20	3 000	-15	60	120
I	pétrole	55	15	2 000	7	40	70
J	électronique	50	6	4 500	10	150	300

Attention : Répondez à chaque question sans tenir compte des données figurant dans les autres questions.

QUESTIONS ET EXPLICATIONS :

1. Quelle est la société du secteur automobile dont les avoirs sont les plus **bas** ?

(1) A
(2) D
(3) F
(4) A et D

Dans la deuxième colonne en partant de la gauche figurent les secteurs d'activité de chaque société. On y découvre que les sociétés A, D et F sont les seules à opérer dans le secteur automobile. Examinons les avoirs (deuxième colonne en partant de la droite) de chacune de ces sociétés : les avoirs de A se montent à 180 millions de dollars et c'est également le montant des avoirs de D. Les avoirs de F se montent à 55 millions de dollars : F est donc la société du secteur automobile dont les avoirs sont les plus bas et la bonne réponse est (3).

---

2. En admettant que les bénéfices sont répartis de façon égale entre tous les employés de la société, dans laquelle des sociétés suivantes le bénéfice **par employé** est-il le plus élevé ?

(1) H (2) B (3) C (4) F

Le bénéfice par employé ne figure pas spécifiquement dans le tableau mais on peut le calculer à partir des données fournies. Le tableau nous donne le bénéfice de chaque société ainsi que le nombre de ses employés. Le bénéfice par employé dans une société est le bénéfice global de cette société divisé par le nombre de ses employés.
Pour toutes les sociétés, le bénéfice global est donné en millions de dollars et le nombre des employés en milliers. Pour comparer entre les sociétés, on peut donc considérer uniquement les nombres figurant dans le tableau et représenter le bénéfice par employé de la façon suivante :

H	B	C	F
$\frac{3\,000}{120}$	$\frac{6\,500}{150}$	$\frac{5\,000}{100}$	$\frac{3\,000}{100}$

On peut bien sûr calculer le bénéfice par employé et trouver dans quelle société on obtient la valeur la plus élevée mais ont peut aussi comparer les expressions sans les calculer :
Les sociétés F et H ont le même bénéfice (3 000) mais pour la société F il se divise par un nombre plus petit d'employés (100 < 120) et par conséquent le bénéfice par employé dans la société F est plus élevé.
Le nombre d'employés des sociétés F et C est identique (100) mais le bénéfice global de la société C est plus élevé (3 000 < 5 000) et par conséquent le bénéfice par employé dans la société C est plus élevé.
Les sociétés B et C sont différentes tant en ce qui concerne le nombre d'employés qu'en ce qui concerne le bénéfice global. Le nombre d'employés de la société B est 1,5 fois plus élevé que celui de la société C (150 contre 100).
Si le bénéfice global de la société B était également 1,5 fois plus élevé que celui de la société C (autrement dit, si le bénéfice de B était 5 000 · 1,5 = 7 500), le bénéfice par employé aurait été identique pour les deux sociétés.
Or le bénéfice global de la société B est inférieur à cette somme (6 500 < 7 500), c'est pourquoi le bénéfice par employé de la société B est inférieur au bénéfice par employé de la société C. Par conséquent, c'est dans la société C qu'on trouve le bénéfice le plus élevé par employé et (3) est la bonne réponse.

On peut aussi bien sûr calculer le bénéfice par employé pour les sociétés B et C :

Le bénéfice par employé dans la société C est égal à 50 $\left(\frac{5\,000}{100} = 50\right)$ et dans la société B le bénéfice par employé est inférieur à 50 $\left(\frac{6\,500}{150} < 50\right)$.

Par conséquent le bénéfice par employé dans la société C est plus élevé.

3. Quel était le volume des ventes de la société G au cours de l'année passée (en milliards de dollars) ?

(1) 48 (2) 50 (3) 64 (4) 76

Le volume des ventes de l'année passée ne figure pas sur le tableau mais on peut le calculer à l'aide du volume des ventes de l'année en cours et du pourcentage de variation par rapport à l'année passée. Le tableau nous apprend que la société G a vendu cette année pour 60 milliards de dollars et que ses ventes ont augmenté de 25 % par rapport à l'année passée. Le volume de ses ventes au cours de l'année passée est donc une valeur qui, augmentée de 25 %, donne 60 milliards.
Désignons par x le volume des ventes de l'année passée et exprimons les données dans l'équation : $x + \frac{25}{100} \cdot x = 60$. Simplifions l'équation : $\frac{125}{100} \cdot x = 60$. Isolons x: $x = 60 \cdot \frac{100}{125}$.
Réduisons le numérateur et le dénominateur de la fraction par 25 : $x = 60 \cdot \frac{4}{5} = 48$

Le volume des ventes de la société G au cours de l'année passée était donc 48 milliards de dollars et la bonne réponse est (1).

4. Définissons le volume des dépenses d'une société pour une année donnée ainsi :

$$\begin{pmatrix}\text{Volume des dépenses}\\\text{pour l'année donnée}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\text{Volume des ventes}\\\text{de l'année en question}\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}\text{Volume des bénéfices}\\\text{de l'année en question}\end{pmatrix}$$

Quel est le secteur d'activité de la société dont le volume de dépenses est le plus élevé pour l'année en cours ?

(1) Automobile
(2) Pétrole
(3) Electronique
(4) Métallurgie

Pour calculer le volume des dépenses d'une société pour l'année en cours, il faut soustraire le volume des bénéfices du volume des ventes. Dans le tableau, le volume des ventes est donné en milliards de dollars tandis que le volume des bénéfices est donné en millions de dollars. Pour pouvoir soustraire l'un de l'autre, il faut les convertir dans les mêmes unités. Si nous multiplions le volume des ventes figurant dans le tableau par 1000, nous obtenons cette donnée en millions de dollars.

Ainsi, le volume des ventes de la société C est de 105 000 millions de dollars. Le volume des bénéfices de cette société est de 5 000 millions de dollars, c'est pourquoi le volume des dépenses de cette société est de 100 000 millions de dollars. On peut calculer de cette manière le volume des dépenses de toutes les sociétés figurant dans le tableau et trouver la société au volume de dépenses le plus élevé.

On peut toutefois s'économiser ce calcul : il découle de la formule définissant le volume des dépenses que le volume des dépenses sera plus élevé à mesure que le volume des ventes augmentera ou que le volume des bénéfices diminuera. Par conséquent, il convient d'étudier d'abord les sociétés au volume de ventes le plus élevé ou au volume de bénéfices le plus bas. L'examen du tableau montre que la société A possède à la fois le volume de ventes le plus élevé et le volume de bénéfices le plus bas (elle est la seule dont le volume des bénéfices est négatif, autrement dit elle a subi des pertes). Elle a donc donc certainement le volume de dépenses le plus élevé. La société A opère dans le secteur automobile et la bonne réponse est donc (1).