

RAZONAMIENTO CUANTITATIVO

En esta área se analizan las capacidades de utilización de números y términos matemáticos para resolver problemas cuantitativos, y la capacidad de analizar datos presentados bajo diversas formas tales como tablas y gráficos. El conocimiento matemático exigido es de nivel elemental (los temas se estudian hasta el noveno y décimo grado de la mayoría de las escuelas del país).

Todas las preguntas de esta área tienen la estructura de las preguntas de alternativa - una pregunta y después de ella cuatro opciones de respuesta, de las cuales una sola es la respuesta correcta.

Las preguntas de la sección de razonamiento cuantitativo son de dos tipos: preguntas y problemas, y preguntas de inferencia a partir de la comprensión de un gráfico o de una tabla.

Preguntas y problemas - Estas preguntas tratan acerca de una variedad de temas del álgebra y de la geometría. Algunas preguntas son presentadas en términos matemáticos; otras preguntas son de formulación verbal y en ellas hay que traducir primeramente el problema a términos matemáticos.

Preguntas de inferencia a partir de la comprensión de un gráfico o de una tabla. Estas preguntas se refieren a la información suministrada por medio de un gráfico o de una tabla. En los gráficos se exhiben datos en forma gráfica, por ejemplo, por medio de un diagrama de barras, de un gráfico, de un diagrama de dispersión, etc. En las tablas se presentan datos ordenados en columnas y filas.

En cada una de estas clases las preguntas están ordenadas por lo general en un orden creciente de dificultad. Al principio las preguntas son fáciles y el tiempo requerido para responderlas es relativamente corto; paulatinamente se van haciendo más difíciles y requieren más tiempo.

Los dibujos que acompañan a algunas de las preguntas, no están necesariamente a escala. No hay que inferir sólo del aspecto del dibujo acerca de longitudes de segmentos, de la magnitud de ángulos, etc. No obstante lo cual, si una línea parece recta en el dibujo, se puede suponer que es efectivamente recta.

Al comienzo de la sección hay una "hoja de fórmulas": en dicha hoja hay instrucciones, indicaciones y fórmulas diversas. Uds. podrán hacer uso de ella durante el examen. La "hoja de fórmulas" está incluida también en esta guía (en la página 40) y en las secciones de razonamiento cuantitativo del examen de práctica. Es conveniente que conozcan su contenido y que sepan manejarla antes del momento del examen.

En las páginas 41-64 hay un repaso de conceptos básicos de matemática, que refleja en gran medida los contenidos temáticos en los que se basan las preguntas de las secciones de razonamiento cuantitativo. Con todo, en el examen mismo podrían aparecer preguntas, cuya resolución demanda conceptos y teoremas matemáticos adicionales, que no aparecen en dichas páginas.

En las páginas 65-82 hay algunos ejemplos de los diversos tipos de preguntas, y para cada ejemplo se suministra la solución con una explicación detallada.

HOJA DE FÓRMULAS

Esta sección incluye 20 preguntas.

El tiempo a tu disposición es de 20 minutos.

En esta sección aparecen preguntas y problemas que exigen razonamiento cuantitativo. Para cada pregunta se proponen cuatro respuestas. Deben elegir la respuesta correcta y señalar su número en el lugar correspondiente en la hoja de respuestas.

Observaciones generales

- * Los dibujos que aparecen junto a una parte de las preguntas están destinados a ayudar a resolverlas, pero no están trazados necesariamente a escala. A partir del dibujo solo, no deben sacarse conclusiones respecto a longitudes de segmentos, magnitudes de ángulos, etc.
- * Si una línea parece recta en el dibujo se puede suponer que es efectivamente recta.
- * Cuando en una pregunta aparezca un término geométrico (lado, radio, área, volumen, etc) como dato, se tratará de un término cuyo valor es mayor que cero, a menos que se haga indicación expresa de lo contrario.
- * Cuando en una pregunta aparece escrito $\sqrt{a}$ ($a > 0$), se trata de la raíz positiva de a .
- * "0" es un número que no es ni positivo ni negativo.
- * "0" es un número par.
- * "1" no es un número primo.

Fórmulas

1. **Porcentajes :** $a\%$ de x es $\frac{a}{100} \cdot x$

2. **Potencias :** Para todo a distinto de 0, y para todo n y m enteros -

a. $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

b. $a^{m+n} = a^m \cdot a^n$

c. $a^{\frac{n}{m}} = (\sqrt[m]{a})^n$ ($0 < a$, $0 < m$)

d. $a^{n \cdot m} = (a^n)^m$

3. **Producto de binomios :**

$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$

$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$

4. **Problemas de recorrido :** $\frac{\text{distancia}}{\text{tiempo}} = \text{velocidad}$

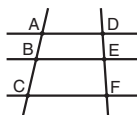
5. **Problemas de rendimiento :**

$\frac{\text{cantidad de trabajo}}{\text{tiempo}} = \text{rendimiento}$

6. **Factorial :** $n! = n(n-1)(n-2) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1$

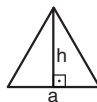
7. **Proporciones :** Si $AD \parallel BE \parallel CF$

entonces $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF}$ y también $\frac{AB}{AC} = \frac{DE}{DF}$



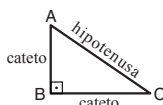
8. **Triángulo :**

a. **El área de un triángulo** cuya base es a y la altura correspondiente a dicha base es h , es $\frac{a \cdot h}{2}$



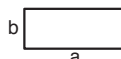
b. **Teorema de Pitágoras :**

En un triángulo rectángulo ABC se cumple: $AC^2 = AB^2 + BC^2$

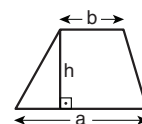


c. En todo triángulo rectángulo cuyos ángulos son de 30° , 60° y 90° , la longitud del cateto opuesto al ángulo de 30° es igual a la mitad de la longitud de la hipotenusa.

9. **El área de un rectángulo** de largo a y de ancho b es $a \cdot b$



10. **El área de un trapecio** una de cuyas bases es a , la otra base es b y la altura es h , es $\frac{(a+b) \cdot h}{2}$



11. a. **Ángulos interiores de un polígono de n lados**

La suma de los ángulos interiores del polígono es $(180n - 360)$ grados.

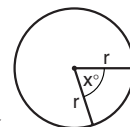
b. Si el polígono es regular, la magnitud de cada uno de los ángulos interiores es $\left(\frac{180n-360}{n}\right) = \left(180 - \frac{360}{n}\right)$ grados.

12. **El círculo y la circunferencia :**

a. **El área** de un círculo de radio r es πr^2 ($\pi = 3.14\dots$)

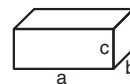
b. **El perímetro** de una circunferencia de radio r es $2\pi r$

c. **El área de un sector circular** con ángulo al centro de x° es $\pi r^2 \cdot \frac{x}{360}$



13. **Caja, cubo :**

a. **El volumen** de una caja de longitud a , de ancho b y de altura c es $a \cdot b \cdot c$

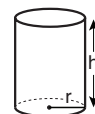


b. **El área de la superficie total** de la caja es $2ab + 2bc + 2ac$

c. En un **cubo**, $a = b = c$

14. **Cilindro :**

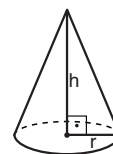
a. **El área de la superficie lateral** de un cilindro de radio r y de altura h es $2\pi r \cdot h$



b. **El área de la superficie total** del cilindro es $2\pi r^2 + 2\pi r \cdot h = 2\pi r(r + h)$

c. **El volumen** del cilindro es $\pi r^2 \cdot h$

15. **El volumen de un cono** cuya base es de radio r y cuya altura es h es $\frac{\pi r^2 \cdot h}{3}$



16. **El volumen de la pirámide** cuya área de la base es S y su altura es h es $\frac{S \cdot h}{3}$

REPASO DE CONCEPTOS BÁSICOS DE MATEMÁTICA

SIGNOS

$a \parallel b$	las rectas a y b son paralelas
$a \perp b$	la recta a es perpendicular a la recta b
$\square$	Ángulo de 90° , ángulo recto
$\sphericalangle ABC$	El ángulo convexo formado entre los segmentos AB y BC
$x = y$	x es igual a y
$x \neq y$	x es distinto de y
$x < y$	x es menor que y
$x \leq y$	x es menor o igual que y
$a < x, y$	x e y son mayores que a
$x = \pm a$	x puede ser igual a a o a $-a$
$ x $	el valor absoluto de x
$x : y$	la relación entre x e y

CLASES DE NÚMEROS

- Entero:** Un número entero es un número compuesto de unidades enteras. Un número entero puede ser positivo, negativo, o 0.
 Por ejemplo: $\dots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \dots$
 Presten atención: 0 es un número entero que no es ni positivo ni negativo.
- No entero:** Número que no puede ser expresado en unidades enteras.
 Por ejemplo: $1.37, 2\frac{1}{2}, -1\frac{1}{2}, \sqrt{2}$
- Consecutivos:** Son números enteros que vienen uno a continuación del otro con diferencia de una unidad. Por ejemplo, el 4 y el 5 son números consecutivos, 2, 3 y 4, y también (-3) y (-2) son números consecutivos.
 En general, si n es un entero entonces n y $(n + 1)$ son números consecutivos.
 A veces se dice: $(n + 1)$ es el sucesor de n .
- Par:** Es un número entero tal que si se lo divide por 2 se obtiene un número entero (es decir, es divisible por 2 sin resto).
 En general, si n es entero entonces $2n$ es par.
 Presten atención: 0 es un número par.
- Impar:** Es un número entero, tal que si se lo divide por 2, se obtiene un número no entero (es decir, cuando se lo divide por 2 el resto es 1).
 En general, si n es un número entero, entonces $2n + 1$ es un número impar.
- Primo:** Es un número entero positivo que se divide sin resto por dos números solamente: por sí mismo, y por 1.
 Por ejemplo, 13 es un número primo, puesto que no puede dividirse sin resto más que por 13 y por 1.
 Presten atención: el 1 **no** se define como número primo.

Opuestos: Un par de números cuya suma es igual a cero se dicen opuestos.
Por ejemplo: 4 y (-4) son opuestos.
En general: a y (-a) son opuestos, $a + (-a) = 0$ o, dicho de otro modo, (-a) es el número opuesto de a.

Inversos: Un par de números cuyo producto es igual a 1 se dicen inversos.
Por ejemplo: 3 y $\frac{1}{3}$ son inversos y también $\frac{2}{7}$ y $\frac{7}{2}$.
En general: Para a, b $\neq 0$:
a y $\frac{1}{a}$ son inversos ($a \cdot \frac{1}{a} = 1$), o en otras palabras $\frac{1}{a}$ es el inverso de a.
 $\frac{a}{b}$ y $\frac{b}{a}$ son inversos ($\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = 1$), o en otras palabras $\frac{b}{a}$ es el inverso de $\frac{a}{b}$.

Valor absoluto: si $x > 0$ entonces $|x| = x$
si $x < 0$ entonces $|x| = -x$
 $|0| = 0$

OPERACIONES ARITMÉTICAS CON NÚMEROS PARES E IMPARES

par	+	par	=	par
impar	+	impar	=	par
impar	+	par	=	impar
par	-	par	=	par
impar	-	impar	=	par
par	-	impar	=	impar
impar	-	par	=	impar
par	×	par	=	par
impar	×	impar	=	impar
impar	×	par	=	par

No existen reglas parecidas para la operación de la división. Por ejemplo, el cociente de dos números pares puede ser impar ($\frac{6}{2} = 3$), par ($\frac{4}{2} = 2$) o número no entero ($\frac{6}{4} = 1\frac{1}{2}$).

FACTORES (DIVISORES) Y MÚLTIPLOS

Factor (divisor) de un número entero y positivo es todo número entero positivo por el cual dicho número puede ser dividido sin resto. Por ejemplo, los números 24, 12, 8, 6, 4, 3, 2, y 1 son factores (divisores) de 24.

Factor común de x y de y es un número que es factor (divisor) de x y también de y . Por ejemplo, 6 es un factor común de 24 y de 30.

Factor primo es un factor que además es un número primo. Por ejemplo, 2 y 3 son factores primos de 24. Todo número entero y positivo (mayor que 1) puede escribirse como el producto de sus factores primos. Por ejemplo, $24 = 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 3 \cdot 2^3$.

Múltiplo de un número entero x es cualquier número entero que es divisible por x sin dejar resto. Por ejemplo, 16, 32 y 88 son múltiplos de 8.

Cuando en una pregunta esté escrito "divisible" se entenderá "divisible sin resto".

OPERACIONES ARITMÉTICAS CON FRACCIONES

Simplificación

Cuando el numerador y el denominador de una fracción tienen un factor común, se los puede dividir sin resto por ese número y obtener una fracción equivalente a la original, pero con numerador y denominador más pequeños. Por ejemplo, si dividimos el numerador y el denominador de la fracción $\frac{16}{12}$ por 4 se obtendrá $\frac{4}{3}$, $\left(\frac{16}{12} = \frac{4}{3}\right)$.

Multiplicación

Para multiplicar dos fracciones hay que multiplicar los dos numeradores entre sí y los dos denominadores entre sí.

Por ejemplo: $\frac{2}{3} \cdot \frac{5}{7} = \frac{2 \cdot 5}{3 \cdot 7} = \frac{10}{21}$

División

Para dividir un número (entero o fracción) por una fracción hay que multiplicar ese número por la fracción inversa de la fracción divisor.

Por ejemplo: $\frac{\frac{2}{5}}{\frac{3}{8}} = \frac{2}{5} : \frac{3}{8} = \frac{2}{5} \cdot \frac{8}{3} = \frac{2 \cdot 8}{5 \cdot 3} = \frac{16}{15}$

Para multiplicar o dividir un número entero por una fracción, se puede tomar al número entero como si fuera una fracción cuyo denominador es 1, por ejemplo: $2 = \frac{2}{1}$.

Suma y resta

Para sumar o restar fracciones, hay que convertirlas en fracciones con denominador común. El **denominador común** es un número que es divisible, sin resto, por los denominadores de cada una de las fracciones dadas. Una vez que se ha encontrado un número adecuado que pueda hacer de denominador común, se deben "traducir" las fracciones dadas a las equivalentes con denominador común. Para ello basta multiplicar numerador y denominador por el mismo número entero, de modo que en el denominador se obtenga el número que se ha elegido para hacer de denominador común. Puesto que se ha multiplicado el numerador y el denominador por un mismo número, la fracción obtenida es equivalente a las dadas pues de hecho se las ha multiplicado por 1. Una vez que todas las fracciones han sido "traducidas" a denominador común se pueden sumar o restar los nuevos numeradores obtenidos y, de ser posible, se puede simplificar el resultado.

EJEMPLO

$$\frac{3}{4} + \frac{1}{6} + \frac{5}{8} = ?$$

Un denominador común posible es el 24, pues es divisible por cada uno de los denominadores de las fracciones dadas sin resto: $\frac{24}{4} = 6$; $\frac{24}{6} = 4$; $\frac{24}{8} = 3$

"Traduciremos" cada una de las fracciones a fracciones con ese denominador común:

$$\frac{3}{4} = \frac{18}{24}, \quad \frac{1}{6} = \frac{4}{24}, \quad \frac{5}{8} = \frac{15}{24}$$

Y obtendremos:

$$\frac{3}{4} + \frac{1}{6} + \frac{5}{8} = \frac{18}{24} + \frac{4}{24} + \frac{15}{24} = \frac{18+4+15}{24} = \frac{37}{24}$$

PORCENTAJES

El porcentaje es un modo de indicar centésimos: $a\%$ de x son a centésimas de x , o sea, $\frac{a}{100} \cdot x$.

En las preguntas en las que aparezcan porcentajes, se los debe traducir a fracciones centesimales y proceder con ellos como si se tratara de fracciones comunes.

EJEMPLO

¿Cuánto es el 60 por ciento de 80?

En lugar de 60 por ciento podemos escribir 60 centésimos, resuélvanla como un producto de

fracciones: $\frac{60}{100} \cdot 80 = \frac{60 \cdot 80}{100} = 6 \cdot 8 = 48$

Es decir: 60% de 80 es 48.

En las preguntas que se refieren al cambio de porcentajes, hay que entender que se trata de un porcentaje del valor inicial, a menos que se indique expresamente otra cosa.

EJEMPLO

El precio de un artículo que costaba 80 pesos se aumentó en un 25%. ¿Cuál es su nuevo precio?

Dado que se ha agregado un 25% al precio antiguo, su nuevo precio será entonces el 125% del precio original (100% + 25%). Por lo tanto, se debe calcular cuánto es el 125% de 80 pesos.

Escribamos centésimas en lugar de porcentajes:

$$\frac{125}{100} \cdot 80 = 100, \text{ es decir, el nuevo precio del artículo será 100 pesos.}$$

EJEMPLO

El precio de un artículo que costaba 15 pesos bajó a 12 pesos. ¿En qué porcentaje fue rebajado el precio?

En este ejemplo se da el cambio de precio de un artículo y hay que calcular el porcentaje del cambio.

La variación del precio es de 3 pesos de un total de 15. Hay que calcular qué porcentaje de 15 es 3 (como en el ejemplo 2).

Traducimos la pregunta a su expresión matemática: $\frac{x}{100} \cdot 15 = 3$ y resolviendo

la ecuación resulta que $x = \frac{3 \cdot 100}{15} = 20$, o sea, que el precio se rebajó en un 20%.

PROPORCIONES (RELACIONES)

La relación o proporción en la que se encuentran x e y se escribe $x : y$.

EJEMPLO

La relación entre el número de pares de medias de Pedro y el número de sus camisas es $3 : 2$. Eso quiere decir que Pedro tiene 3 pares de medias por cada 2 camisas. O, lo que es lo mismo: el número de pares de medias de Pedro es $\frac{3}{2}$ veces mayor que el número de sus camisas.

PROMEDIO

Se llama **promedio** (o media aritmética) de un conjunto de valores a la suma de todos esos valores dividido por el número de valores que se toman en cuenta.

Cuando en una pregunta aparezca simplemente la palabra "promedio" hay que entender que se trata de la media aritmética.

Por ejemplo, la media aritmética del grupo de valores 1, 3, 5, 10 y 21 es 8, pues

$$\frac{1+3+5+10+21}{5} = \frac{40}{5} = 8$$

Si se da el promedio de un conjunto de valores, se puede calcular la suma de esos valores multiplicando el promedio por el número de dichos valores.

EJEMPLO

Dani compró 5 artículos cuyo precio promedio es 10 pesos. ¿Cuánto pagó Dani por todos esos artículos? En esta pregunta hay que encontrar la suma sobre la base del promedio, por lo tanto, multiplicamos el promedio por el número de artículos, y obtenemos $10 \cdot 5 = 50$, es decir Dani pagó en total 50 pesos por todos los artículos que compró.

La media ponderada es un promedio que considera el peso relativo de cada uno de los valores del conjunto.

EJEMPLO

En el examen parcial la nota de Pepe fue 75, y en el examen final obtuvo 90. Si el peso del examen final es 2 veces mayor que el peso del parcial, ¿cuál será la nota final que obtendrá Pepe en el curso?

El conjunto de valores en este caso es 75 y 90. Pero cada uno de ellos tiene un peso diferente en la nota final del curso. La nota 75 tiene un peso de 1, mientras que la nota 90 tiene un peso de 2. Para calcular el promedio ponderado hay que multiplicar cada nota por el peso que se le dio y dividir por la suma de dichos pesos. $\frac{1 \cdot 75 + 2 \cdot 90}{1+2} = 85$. Por lo tanto, la nota de Pepe en el curso es de 85.

Este cálculo equivale al cálculo de la media común de tres números: 75, 90 y 90.

POTENCIAS Y RAÍCES

La elevación de un número a la potencia n (con n entero y positivo), es la multiplicación del número por sí mismo n veces: $\underbrace{a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ veces}} = a^n$

Por ejemplo: $(-3)^3 = (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) = -27$

a^n es una potencia; n es el exponente y a es la base de la potencia.

Todo número distinto de cero elevado a la potencia 0 equivale a 1, es decir, para todo $a \neq 0$ $a^0 = 1$.

Elevar a una potencia con exponente negativo es lo mismo que elevar el inverso de la base a la

potencia de exponente opuesto: $a^{-n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n = \frac{1}{a^n}$

Por ejemplo: $2^{-3} = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$

La raíz n -ésima de un número positivo a , lo cual se indica $\sqrt[n]{a}$, es un número positivo b tal que si lo elevamos a la potencia n obtendremos a :

$\sqrt[n]{a} = b$ pues $b^n = a$

Por ejemplo: $\sqrt[4]{81} = 3$ pues $3^4 = 81$

Cuando no se escriba el índice de la raíz se tratará de la raíz de índice 2. La raíz de índice 2 se llama también raíz cuadrada.

Por ejemplo: $\sqrt{81} = \sqrt[2]{81} = 9$

Se puede también expresar una raíz como potencia de exponente fraccionario. La fracción es el número inverso del índice de la raíz: $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$ ($0 < a$).

Es importante señalar: Cuando se escribe $\sqrt{a}$ ($a > 0$) se quiere indicar la raíz positiva de a .

Reglas básicas para operar con potencias (para todo m y n):

Producto: Para multiplicar potencias de igual base hay que sumar los exponentes de las potencias: $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

División: Para dividir potencias de igual base hay que restar el exponente del denominador del exponente del numerador: $\frac{a^m}{a^n} = a^{(m-n)}$

Presten atención: **Cuando las bases no son iguales no es posible sumar o restar los exponentes.**

Elevación de una potencia a una potencia: Para elevar una potencia a una potencia hay que multiplicar los exponentes entre sí $(a^m)^n = a^{(m \cdot n)}$

Potencia de un producto o de un cociente: $(a \cdot b)^m = a^m \cdot b^m$; $\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$.

Puesto que las raíces pueden ser expresadas como potencias, se pueden aplicar las leyes de la potenciación a las operaciones con raíces. Por ejemplo, para calcular $\sqrt[m]{a} \cdot \sqrt[n]{a}$ ($0 < a$) hay que expresar primeramente las raíces como producto de potencias: $\sqrt[m]{a} \cdot \sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{m}} \cdot a^{\frac{1}{n}}$, y operamos luego como en el producto de potencias, o sea, sumando los exponentes: $a^{\frac{1}{m}} \cdot a^{\frac{1}{n}} = a^{\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{n}\right)}$.

Desigualdades entre potencias:

Si $0 < b < a$ y $0 < n$, entonces $b^n < a^n$

Si $0 < b < a$ y $n < 0$, entonces $a^n < b^n$

Si $1 < a$ y $m < n$, entonces $a^m < a^n$

Si $0 < a < 1$ y $m < n$ entonces $a^n < a^m$

PRODUCTO SIMPLIFICADO

Para multiplicar dos expresiones que se hallan entre paréntesis, cada una de las cuales es una suma de términos, hay que multiplicar cada uno de los términos de la primera por cada uno de los términos de la segunda expresión y luego sumar los productos.

Por ejemplo: $(a + b) \cdot (c + d) = ac + ad + bc + bd$

Esta regla general se aplica para los siguientes casos especiales que conviene recordar para ahorrar tiempo:

$$(a + b)^2 = (a + b) \cdot (a + b) = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a - b)^2 = (a - b) \cdot (a - b) = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a - b) \cdot (a + b) = a^2 - b^2$$

COMBINATORIA

Experimento de múltiples etapas

EJEMPLO

Arrojamos un dado y luego de ello arrojamos una moneda, ¿cuál será el número de resultados posibles de este experimento?

Este experimento tiene dos etapas: la etapa del lanzamiento del dado y la etapa del lanzamiento de la moneda.

El número de resultados posibles de arrojar un dado es 6 y el número de resultados posibles de arrojar una moneda es 2. El número de resultados posibles de la totalidad de este experimento será $6 \cdot 2 = 12$. Uno de los doce resultados posibles es: 3 en el dado y "cara" en la moneda.

De hecho, el experimento no cambia si se arroja primero la moneda y después el dado o si se arrojan el dado y la moneda al mismo tiempo. El número de resultados posibles es siempre 12.

A continuación nos referiremos a un experimento compuesto en el que se da un grupo de n objetos, y se elige de él un objeto al azar r veces. Cada elección de un objeto del grupo es una etapa del experimento y en total hay en el experimento r etapas. El número de resultados posibles de cada una de las r etapas depende de la manera en que sean elegidos los objetos. El número de resultados posibles en el experimento total es el producto de número de resultados posibles que se obtienen en las r etapas. Todo resultado posible en el experimento se llama **muestra**.

Muestras ordenadas con restitución

El modo de elección de los objetos: Un objeto elegido **es restituido** al conjunto inmediatamente después de haber sido elegido, y **tiene importancia el orden** en que son elegidos los objetos.

Número de resultados posibles: en cada etapa el número de resultados posibles es n , por lo tanto, el número de resultados posibles en las r etapas, es decir, en el experimento total es $n \cdot n \cdot \dots \cdot n = n^r$.

Presten atención: En este modo de elección, un objeto puede ser elegido más de una vez.

El número de muestras ordenadas con restitución es n^r

EJEMPLO

En una caja hay nueve bolas numeradas del 1 al 9. Se extrae al azar una bola de la caja, se la devuelve, y se repite la operación dos veces más. Se registra (de izquierda a derecha) los números de las bolas que van saliendo, según el orden de salida de modo que resulte un número de tres cifras. ¿Cuántos números diferentes de tres cifras pueden obtenerse de este modo?

En este experimento el orden tiene importancia: Por ejemplo, si los números extraídos son 3, 8 y 3, se obtiene el número 383, pero si fueran extraídos en el orden 3, 3 y 8, el número que se obtiene es 338, y éstos son dos números distintos.

El número de etapas del experimento es 3 y en cada etapa el número de resultados posibles es 9, por lo tanto, el número de resultados posibles del experimento total es $9^3 = 729$, es decir, que se pueden obtener 729 números diferentes de tres cifras.

Muestras ordenadas sin restitución

El modo de elección de los objetos: un objeto que ha sido elegido **no es restituido** al conjunto después de haber sido elegido, y **tiene importancia el orden** en que son elegidos los objetos.

Número de resultados posibles: el número de resultados posibles en la primera etapa es n , el número de resultados posibles en la segunda etapa es $n - 1$ (pues el objeto elegido en la primera etapa no fue restituido, y quedan, por lo tanto, sólo $n - 1$ objetos para elegir entre ellos) y así siguiendo hasta la última etapa, la etapa r en la que el número de resultados posibles será $n - r + 1$. Por lo tanto, el número de resultados posibles del experimento total es $n \cdot (n - 1) \cdot \dots \cdot (n - r + 1)$.

El número de muestras ordenadas sin restitución es $n \cdot (n - 1) \cdot \dots \cdot (n - r + 1)$

EJEMPLO

En una caja hay nueve bolas numeradas del 1 al 9. Se extraen al azar, una tras otra, tres bolas, sin restituir la bola que ha sido extraída, y se registran (de izquierda a derecha) los números de las bolas que van saliendo, según el orden de salida de modo que resulte un número de tres cifras. ¿Cuántos números diferentes de tres cifras pueden obtenerse de este modo?

También en este experimento el orden en que fueron extraídas las bolas tiene importancia, pero a diferencia del ejemplo anterior, en este experimento no se devuelve a la caja la bola extraída, y por lo tanto, el número de resultados posibles en la primera etapa es 9, en la segunda etapa es 8 y en la tercera etapa es 7. El número de resultados posibles para el experimento total es $9 \cdot 8 \cdot 7 = 504$, es decir, se pueden obtener 504 números diferentes de tres cifras.

Permutaciones (ordenaciones internas)

Cuando producimos una muestra ordenada sin restitución de la totalidad de los n objetos de un conjunto (es decir, cuando $n = r$), cada resultado posible describe una permutación de los objetos: cuál es el primer objeto, cuál es el segundo, etc. La pregunta es: ¿cuántas permutaciones son posibles?

Establezcamos $r = n$ en la fórmula para obtener el número de las muestras ordenadas sin restitución y obtendremos $n \cdot (n - 1) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$. A este número se lo llama "factorial de n " y se indica $n!$.

El número de permutaciones (ordenaciones internas) de n objetos es $n!$

EJEMPLO

La abuela, la madre y la hija quieren ordenarse en línea para una fotografía. ¿De cuántas maneras diferentes pueden hacerlo?

Se puede pensar que quien se halla ubicada a la derecha es la primera, la del medio es la segunda y la que está a la izquierda es la tercera, y entonces la pregunta es cuántas permutaciones de abuela, madre e hija son posibles. La abuela, la madre y la hija constituyen un conjunto de tres objetos, y por lo tanto, el número de permutaciones entre ellas $3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$. Detallaremos las permutaciones posibles: abuela-madre-hija, abuela-hija-madre, madre-abuela-hija, madre-hija, abuela, hija-abuela-madre, hija-madre-abuela.

Combinaciones (muestras no ordenadas)

Modo de elección de los objetos: un objeto que ha sido elegido **no es restituido** al conjunto después de haber sido elegido, y **no tiene importancia el orden** en que son elegidos los objetos. Cuando el orden no tiene importancia, todas las muestras en las que hay los mismos r objetos (sólo el orden de elección varía en cada muestra) se consideran como el mismo resultado. El número de tales muestras es en realidad el número de permutaciones de r objetos, es decir $r!$. Para calcular el número de resultados posibles de combinaciones (muestras no ordenadas) se calcula el número de resultados posibles como si tuviera importancia el orden y se lo divide por el número de permutaciones de r objetos.

$$\text{Número de combinaciones} = \frac{\text{Número de muestras ordenadas sin restitución}}{\text{Número de permutaciones en la muestra}} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-r+1)}{r!}$$

EJEMPLO

En una caja hay nueve bolas numeradas del 1 al 9. Se extraen al azar, una tras otra, tres bolas, sin restituir la bola que ha sido extraída, y se las coloca en un sombrero.

¿Cuántas combinaciones posibles de bolas pueden darse en el sombrero?

En esta pregunta importa la combinación de bolas en el sombrero y no el orden en que fueron extraídas de la caja. Por ejemplo, si las bolas fueron extraídas en el orden 5, 1 y 4, la combinación en el sombrero es 1, 4 y 5 y ésta será la combinación en el sombrero también si el orden de la extracción fue 4, 5, y 1 o cualquier otra de las $3!$ permutaciones posibles: 1-4-5, 1-5-4, 4-1-5, 4-5-1, 5-1-4 y 5-4-1 (en realidad no tiene ninguna importancia el hecho de que las bolas sean extraídas una tras otra, y pueden ser extraídas todas a la vez sin que esto afecte al resultado).

Por lo tanto, el número de combinaciones posibles es $\frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{3!}$, es decir hay 84 posibilidades distintas de combinaciones de bolas en el sombrero.

PROBABILIDADES

La teoría de las probabilidades es un modelo matemático para fenómenos (experimentos) cuya ocurrencia es incierta. A cada resultado posible del experimento se lo llama "evento simple" y al conjunto de todos los resultados se lo llama "evento" (para simplificar, utilizaremos la palabra "evento" también para los "eventos simples"). A cada evento se asigna un número entre 0 y 1, que representa la probabilidad (la eventualidad, la medida de la plausibilidad) de que el evento acontezca. Cuanto mayor es la probabilidad mayor es la plausibilidad de que el evento acontezca. Cuando la ocurrencia del evento es cierta la probabilidad de dicha ocurrencia es 1, y cuando el evento es imposible la probabilidad de su ocurrencia es 0.

La suma de las probabilidades de todos los eventos simples del experimento es 1

Cuando todos los n resultados de un experimento son igualmente plausibles, se dicen equiprobables. En este caso la probabilidad de cada resultado es $\frac{1}{n}$.

EJEMPLO

El experimento: Lanzamiento de una moneda.

Los resultados posibles: las caras de la moneda. Se las indica 1 o 0 (cara o ceca).

Si la **moneda es equilibrada** los dos resultados son equiprobables, es decir que la probabilidad de que la moneda caiga sobre el "1" es la misma que la probabilidad de obtener "0", y por lo tanto, la probabilidad de cada resultado posible es $\frac{1}{2}$.

EJEMPLO

El experimento: lanzamiento de un dado equilibrado.

Los resultados posibles: los números 1, 2, 3, 4, 5, y 6 impresos en las caras del dado.

Si el **dado es equilibrado**, la probabilidad de cada uno de los resultados posibles es $\frac{1}{6}$.

Cuando todos los resultados posibles son equiprobables,

la probabilidad de que acontezca el evento es :
$$\frac{\text{Número de resultados del evento particular}}{\text{Totalidad de los resultados posibles del experimento}}$$

EJEMPLO

El experimento: lanzamiento de un dado equilibrado.

Evento : el resultado es menor que 4.

Resultados del evento: los números 1, 2 y 3:

La probabilidad del evento $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

EJEMPLO

El experimento: La extracción de un bolillero de bolillas en el que hay 5 bolillas blancas y 5 bolillas negras.

Evento: extracción de una bolilla negra.

Probabilidad del evento:
$$\frac{\text{Número de bolillas negras}}{\text{Número total de bolillas en el bolillero}} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$$

Probabilidad de la ocurrencia de dos eventos

Cuando ocurren dos eventos en paralelo, o uno después del otro, pueden presentarse dos casos:

- A. **Eventos independientes**, es decir, aquellos en los que la probabilidad de la ocurrencia de un evento no está influida por la ocurrencia del otro evento.
- B. **Eventos dependientes**, es decir, aquellos en los que la probabilidad de la ocurrencia de un evento está influida por la ocurrencia de otro. En otras palabras, la probabilidad de que ocurra un determinado evento después (o con la condición) de que haya ocurrido otro evento, es diferente de la probabilidad de ese determinado evento (cuando no existe la condición).

EJEMPLO

En un bolillero hay 10 bolillas: 5 bolillas blancas y 5 bolillas negras. Se extraen dos bolillas del bolillero una tras otra.

Se sabe que la primera bolilla ha sido negra.

¿Cuál es la probabilidad de que la segunda bolilla sea también negra?

Se dan dos situaciones -

(A) Se restituye la primera bolilla al bolillero.

Puesto que hemos restituido la bolilla al bolillero, no se ha producido ningún cambio en el número de bolillas en el bolillero, y en particular no se ha producido ningún cambio en el número de bolillas negras.

La probabilidad de extraer una segunda bolilla negra es $\frac{5}{10} = \frac{1}{2}$ y es igual a la probabilidad de extraer una primera bolilla negra.

No se ha producido ningún cambio en la probabilidad como resultado del conocimiento de que la primera bolilla extraída fue negra, es decir, los eventos fueron independientes.

(B) No se restituye la primera bolilla al bolillero.

Después de haber extraído una bolilla negra, quedaron en el bolillero 9 bolillas en total, de las cuales 4 son negras.

Por lo tanto, la probabilidad de extraer una segunda bolilla negra es $\frac{4}{9}$.

Esta probabilidad es distinta de la probabilidad de extraer una primera bolilla negra, o sea, que los eventos son dependientes.

La probabilidad de la ocurrencia de dos eventos independientes (paralelamente o uno tras otro) es el producto de las probabilidades de cada uno de los eventos por separado.

EJEMPLO

El experimento: lanzamiento de dos dados equilibrados, uno rojo y uno amarillo.

Indicaremos el evento "obtención un número menor que 3 en el dado rojo" con la letra A.

La probabilidad del evento A es $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

Indicaremos el evento "obtención un número par en el dado amarillo" con la letra B.

La probabilidad del evento B es $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

Puesto que el resultado del lanzamiento de un dado no influye sobre la probabilidad del resultado del lanzamiento de otro dado, el evento A y el evento B son independientes.

La probabilidad de la ocurrencia del evento A y también del evento B (conjuntamente) es, por

lo tanto $\left(\begin{matrix} \text{probabilidad} \\ \text{del evento A} \end{matrix} \times \begin{matrix} \text{probabilidad} \\ \text{del evento B} \end{matrix} \right)$, es decir $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$.

Definiremos dos eventos dependientes A y B (en un experimento cualquiera).

La probabilidad de la ocurrencia del evento B con la condición de que el evento A haya ocurrido

es: $\frac{\text{El número de resultados comunes a B y a A}}{\text{El número de resultados de A}}$

$\frac{\text{El número de resultados de A}}{\text{El número de resultados de A}}$

EJEMPLO

El experimento: lanzamiento de un dado.
 ¿Cuál es la probabilidad de obtener un resultado menor que 4 si se sabe que se ha obtenido un resultado par?
 Indicaremos el evento "obtención un resultado par" con la letra A.
 Indicaremos el evento "obtención un resultado menor que 4" con la letra B.
 Reformulemos la pregunta por medio de los eventos: ¿Cuál es la probabilidad de B si se sabe que (con la condición de que) A ha ocurrido?
 Hay 3 resultados para el evento A: 2, 4, y 6.
 Hay 3 resultados para el evento B: 1, 2, y 3.
 Pero si se sabe que el evento A ha ocurrido, hay un sólo resultado posible para B: 2.
 O en otras palabras, el resultado "2" es el único resultado común a A y a B.
 Por lo tanto, la probabilidad de B si se sabe que A ha ocurrido es $\frac{1}{3}$.
 Esta probabilidad es diferente de la probabilidad de B (sin la condición) que es igual a $\frac{1}{2}$.

RECORRIDO, VELOCIDAD, TIEMPO

La velocidad de un cuerpo es la distancia recorrida por el cuerpo en una unidad de tiempo.
 La fórmula que vincula entre la velocidad, la distancia recorrida por un cuerpo y el tiempo

empleado por el cuerpo en recorrerla es: $v = \frac{s}{t}$

Siendo: v = velocidad
 s = distancia recorrida
 t = tiempo

De esta fórmula se pueden derivar todas las relaciones entre distancia, tiempo y velocidad:

$$s = v \cdot t, \quad t = \frac{s}{v}$$

EJEMPLO

Un tren recorrió 240 km a una velocidad de 80 km/h. ¿Cuánto tiempo llevó realizar el viaje?
 Están dados v (80 km/h), y s (240 km). Hay que calcular t .
 Puesto que la velocidad está dada en km/h el tiempo de recorrido se calculará en horas.
 Utilizando la fórmula $t = \frac{s}{v}$, $t = \frac{240}{80} = 3$.
 Es decir, el viaje llevó 3 horas.

Las unidades de medida de dos de las magnitudes determinan las unidades de medida de la magnitud restante.

Por ejemplo: Si la distancia se indica en kilómetros, (km), y el tiempo en horas, la velocidad se medirá entonces en kilómetros por hora (km/h). Si la distancia estuviera expresada en metros y el tiempo en segundos, la velocidad se expresará en metros por segundo.

Se pueden convertir los metros a kilómetros, y los segundos a horas, y viceversa.

En cada km hay 1,000 metros (1 metro es $\frac{1}{1,000}$ de km).

En una hora hay 3,600 segundos (1 segundo es $\frac{1}{3,600}$ de hora)

La velocidad de 1km/h equivale a la velocidad de $\frac{5}{18}$ metros por segundo, $\left(\frac{1,000}{3,600} = \frac{5}{18}\right)$.

La velocidad de 1metro por segundo equivale a la velocidad de 3.6 km/h $\left(\frac{\frac{1}{1,000}}{\frac{1}{3,600}} = \frac{3,600}{1,000} = 3.6\right)$.

RENDIMIENTO, TRABAJO, TIEMPO

El rendimiento es la cantidad de trabajo por unidad de tiempo.

La fórmula que relaciona entre rendimiento, cantidad de trabajo y el tiempo necesario para realizarlo es: $p = \frac{w}{t}$

Siendo: p = rendimiento

w = cantidad de trabajo

t = tiempo

De esta fórmula se pueden derivar todas las relaciones entre rendimiento, cantidad de trabajo, y

tiempo: $w = p \cdot t$, $t = \frac{w}{p}$

EJEMPLO

Un albañil termina de construir una pared en 3 horas. ¿Cuánto tiempo les demandará a 2 albañiles, trabajando al mismo ritmo, construir 5 paredes?

En la pregunta están dados la cantidad de trabajo de un albañil (una pared) y el tiempo insumido (3 horas). Por lo tanto, su rendimiento es $\frac{1}{3}$ de pared por hora. Tratándose de dos albañiles su rendimiento será $2 \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$ de pared por hora.

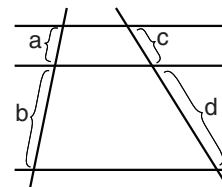
Se nos ha dado también la cantidad de trabajo que deberán hacer los dos albañiles: 5 paredes, por lo tanto, se puede calcular el tiempo que les demandará levantarlas: $t = \frac{5}{\frac{2}{3}} = 5 \cdot \frac{3}{2} = \frac{15}{2} = 7\frac{1}{2}$ horas. O sea, les demandará $7\frac{1}{2}$ horas.

RECTAS PARALELAS (LÍNEAS PARALELAS)

Rectas paralelas que cortan a dos rectas cualesquiera dividen a estas dos rectas en segmentos de longitudes proporcionales.

Por ejemplo, en el dibujo: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$ y también, $\frac{a}{a+b} = \frac{c}{c+d}$

Se pueden encontrar relaciones adicionales entre los segmentos a partir de las relaciones dadas.



ÁNGULOS

El ángulo recto es el ángulo de 90° . En los dibujos se lo indicará $\square$.

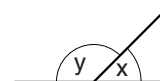
El ángulo agudo es el ángulo de menos de 90° .

El ángulo obtuso es el ángulo de más de 90° .

El ángulo llano es de 180° .

Ángulos suplementarios

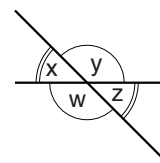
Dos ángulos adyacentes generados por una recta y una semirrecta que tiene origen en la recta se llaman suplementarios. Conjuntamente forman un "ángulo llano" (ángulo de medio giro) y su suma es de 180° . Por ejemplo, en el dibujo x e y son ángulos adyacentes y por lo tanto $x + y = 180^\circ$



Ángulos opuestos por el vértice

Dos rectas que se cortan determinan cuatro ángulos. Los pares de ángulos que no son adyacentes se llaman opuestos por el vértice y son de igual magnitud.

Por ejemplo, en el dibujo, x y z son ángulos opuestos por el vértice, y también y y w . Según lo afirmado, $x = z$ e $y = w$.

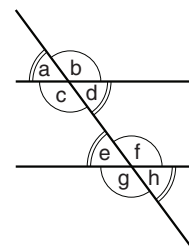


Cuando dos rectas paralelas son cortadas por una transversal se generan ocho ángulos. Por ejemplo, en el dibujo, a , b , c , d , e , f , g y h .

Ángulos correspondientes

Son los ángulos que estando del mismo lado de la transversal están también del mismo lado en relación a las rectas paralelas. Los ángulos correspondientes entre paralelas son de igual magnitud.

Así, en el dibujo: $a = e$, $b = f$, $c = g$, $d = h$



Ángulos alternos

Son los ángulos que estando a distintos lados de la transversal están en lados distintos en relación a las rectas paralelas (son ambos internos o ambos externos).

Los ángulos alternos entre paralelas son iguales entre sí: $a = h$, $b = g$, $c = f$ y $d = e$

EJEMPLO

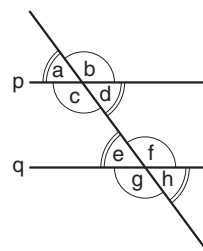
Dadas las rectas p y q paralelas.

$d + f = ?$

c y d son suplementarios y por lo tanto $c + d = 180^\circ$.

c y f son alternos internos y por lo tanto $c = f$.

Por lo tanto, $d + f = d + c = 180^\circ$, y la respuesta es 180° .



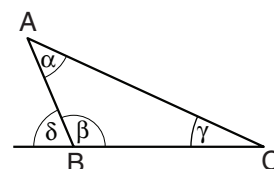
TRIÁNGULOS

Ángulos de un triángulo

En todo triángulo, la suma de sus ángulos interiores es 180° . En el dibujo $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$

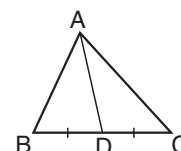
El ángulo adyacente a un ángulo interior se llama ángulo exterior del triángulo, y es igual a la suma de los otros dos ángulos en el triángulo.

Por ejemplo, en el dibujo, δ es un ángulo adyacente a β y, por lo tanto, $\delta = \alpha + \gamma$.



En todo triángulo, a mayor ángulo se opone siempre un mayor lado. Por ejemplo, en el dibujo, $\gamma < \alpha < \beta$. Se sigue de esto que el lado AC (que se opone al ángulo β) es mayor que el lado BC (que se opone al ángulo α) y el lado BC es mayor que el lado AB (que se opone al ángulo γ).

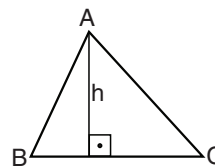
La mediana del triángulo es el segmento que une el vértice del triángulo con el punto medio del lado opuesto a dicho ángulo. Por ejemplo, en el triángulo



del dibujo AD es la mediana para el lado BC y, por lo tanto $BD = DC$.

Altura de un triángulo

La altura correspondiente a uno de los lados de un triángulo es el segmento perpendicular a dicho lado que va desde el vértice opuesto al lado (o a su prolongación). Por ejemplo, en cada uno de los triángulos del dibujo, h es la altura correspondiente al lado BC.

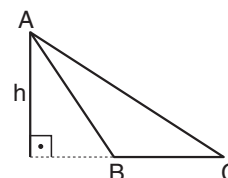


Área de un triángulo

El área de un triángulo es igual a la mitad del producto de su base por su altura.

Por ejemplo, el área de cada uno de los triángulos ABC del dibujo es:

$$\frac{BC \cdot h}{2}$$



Desigualdad triangular

En todo triángulo, la longitud de un lado es siempre menor que la suma de los otros dos.

Por ejemplo en los triángulos dibujados más arriba $(AB + BC) > AC$.

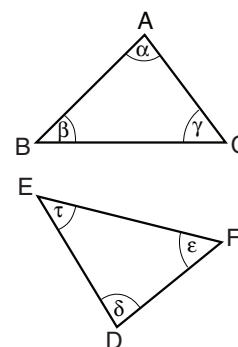
Triángulos congruentes

Dos formas geométricas se dicen congruentes cuando es posible llevar una sobre la otra hasta hacer coincidir todas sus partes. **La congruencia de triángulos** es un caso particular de congruencia. En triángulos congruentes los lados y los ángulos son respectivamente iguales.

Por ejemplo: en el dibujo, si el triángulo ABC es congruente con el triángulo DEF entonces sus lados son respectivamente iguales:

$AB = DE$, $BC = EF$, $AC = DF$, y también sus ángulos son correspondientemente iguales $\alpha = \delta$, $\beta = \tau$, $\gamma = \epsilon$.

Hay cuatro teoremas que nos permiten inferir, si dos triángulos son congruentes o no:



- A. Si dos triángulos tienen dos lados y el ángulo comprendido correspondientemente congruentes, entonces son congruentes (l.a.l. - lado-ángulo-lado).
Por ejemplo, los triángulos del dibujo son congruentes si $AB = DE$, $AC = DF$, y $\alpha = \delta$.
- B. Si dos triángulos tienen un lado y dos ángulos adyacentes correspondientemente congruentes, entonces son congruentes. (ángulo-lado-ángulo, a. l. a.).
Por ejemplo, los triángulos del dibujo son congruentes si $AB = DE$, y $\alpha = \delta$, $\beta = \tau$.
- C. Si dos triángulos tienen sus tres lados correspondientemente iguales, entonces son congruentes. (lado-lado-lado. l. l. l.).
- D. Si dos triángulos tienen dos lados y el ángulo opuesto al mayor de ellos correspondientemente congruentes, entonces son congruentes (lado-lado-ángulo, l. l. a.).
Por ejemplo, los triángulos del dibujo son congruentes si $AB = DE$, $AC = DF$, y también $\gamma = \epsilon$ (siendo $DE > DF$ y $AB > AC$).

Semejanza de triángulos

Dos triángulos se dicen semejantes si los tres ángulos de uno de ellos son iguales a los tres ángulos del segundo.

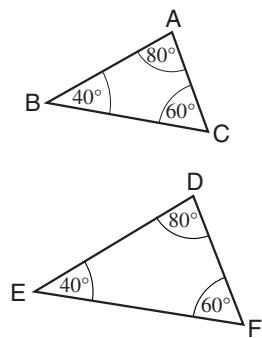
En los triángulos semejantes, la relación entre dos lados cualesquiera de uno de los triángulos es igual a la relación entre los lados correspondientes en el otro triángulo.

Por ejemplo, el triángulo ABC y el triángulo DEF del dibujo son

semejantes y por lo tanto, $\frac{AB}{AC} = \frac{DE}{DF}$.

De aquí se sigue también que $\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF} = \frac{BC}{EF}$.

Los triángulos congruentes son también, necesariamente, semejantes.

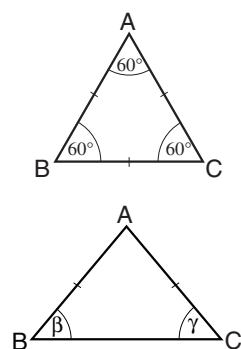


Tipos de triángulos

El triángulo equilátero es un triángulo cuyos tres lados son de igual longitud. Por ejemplo, en el dibujo: $AB = BC = AC$. En este triángulo, sus tres ángulos son de igual magnitud (60°).

Además, si la longitud del lado de un triángulo equilátero es a , entonces la altura es $a \frac{\sqrt{3}}{2}$, y su área es $a^2 \frac{\sqrt{3}}{4}$.

El triángulo isósceles es un triángulo que tiene un par de lados de igual longitud. Por ejemplo, en el dibujo: $AB = AC$. El tercer lado del triángulo isósceles se llama base. Los ángulos que se oponen a los lados iguales, son de igual magnitud. Por ejemplo, en el dibujo: $\beta = \gamma$.



El triángulo acutángulo es el triángulo en el que todos sus ángulos son agudos.

El triángulo obtusángulo es el triángulo en el que uno de sus ángulos es obtuso.

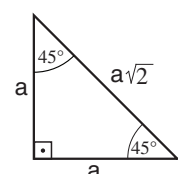
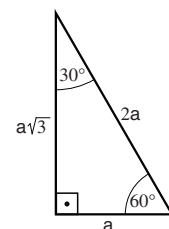
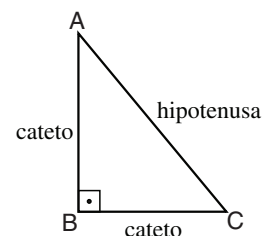
Triángulo rectángulo es aquel triángulo que tiene uno de sus ángulos recto (90°). El lado AC (en el dibujo) opuesto al ángulo recto se llama "**hipotenusa**", y los otros dos (en el dibujo AB y BC) se llaman "**catetos**". Según el teorema de Pitágoras: En un triángulo rectángulo "el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos", o sea: $AC^2 = AB^2 + BC^2$.

Con ayuda de esta fórmula, es posible encontrar la longitud del tercer lado conociendo la longitud de los otros dos.

En el triángulo rectángulo que tiene ángulos de 30° , 60° , y 90° la longitud del cateto opuesto al ángulo de 30° es igual a la mitad de la longitud de la hipotenusa.

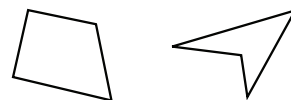
Por ejemplo, en el dibujo, la longitud de la hipotenusa es $2a$ y por lo tanto, la longitud del cateto opuesto al ángulo de 30° es a . Asimismo, según el teorema de Pitágoras, la longitud del cateto opuesto al ángulo de 60° es igual a $a\sqrt{3}$.

En el triángulo rectángulo isósceles, las magnitudes de los ángulos son de 45° , 45° y 90° . Los dos catetos son de igual longitud y la hipotenusa es $\sqrt{2}$ veces la longitud del cateto (según el teorema de Pitágoras). Si, por ejemplo, la longitud de los catetos es a entonces la longitud de la hipotenusa en el dibujo es igual a $a\sqrt{2}$.



CUADRILÁTEROS

Se llama cuadrilátero a un polígono de cuatro lados. Por ejemplo:

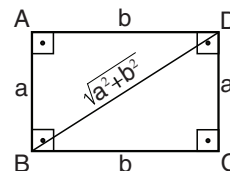


RECTÁNGULO Y CUADRADO

El **rectángulo** es un cuadrilátero que tiene todos sus ángulos rectos. Los lados opuestos del rectángulo son de igual longitud.

El **perímetro del rectángulo** del dibujo es $2a + 2b$ o $2(a + b)$.

La **longitud de la diagonal del rectángulo** del dibujo es, (según el teorema de Pitágoras), $\sqrt{a^2 + b^2}$.



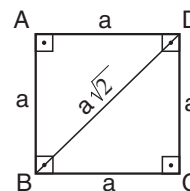
El **área del rectángulo** es el producto de las longitudes de dos lados consecutivos, o sea, en el dibujo, $a \cdot b$.

El **cuadrado** es un rectángulo en el que todos sus lados son de igual longitud.

El **perímetro del cuadrado** es, por lo tanto, (ver dibujo) $4a$.

La **longitud de la diagonal del cuadrado** del dibujo es

$$\sqrt{a^2 + a^2} = a\sqrt{2}$$



El **área del cuadrado** es igual al cuadrado de la longitud de su lado. Por ejemplo, en el dibujo, es a^2 .

PARALELOGRAMO Y ROMBO

El **paralelogramo** es un cuadrilátero que tiene sus lados opuestos iguales y paralelos. Por ejemplo, en el paralelogramo del dibujo:

$$AB \parallel DC, AD \parallel BC$$

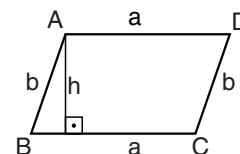
$$AB = DC, AD = BC$$

Las **diagonales de un paralelogramo** se cortan mutuamente en partes iguales.

El **perímetro del paralelogramo** del dibujo será $2a + 2b$.

La **altura del paralelogramo** es el segmento perpendicular que une dos lados opuestos o sus prolongaciones.

El **área del paralelogramo** es igual al producto de un lado por su altura. Por ejemplo, en el paralelogramo del dibujo el área es $a \cdot h$.

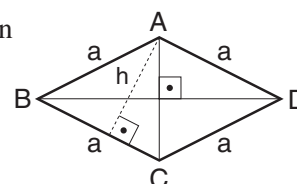


El **rombo** es un cuadrilátero que tiene sus cuatro lados de igual longitud. En el rombo los lados opuestos son paralelos, por lo tanto, puede decirse que el rombo es un paralelogramo cuyos lados son iguales.

Las diagonales del rombo

Puesto que el rombo es un tipo de paralelogramo sus diagonales se cortan en partes iguales. Las diagonales son además perpendiculares.

El **perímetro del rombo** del dibujo es $4a$.



Área del rombo

Puesto que el rombo es una especie de paralelogramo también su **área** puede determinarse como producto del lado por la altura de dicho lado.

Por ejemplo en el rombo del dibujo el área es $a \cdot h$.

Asimismo, se puede calcular el área del rombo como la mitad del producto de las longitudes de sus dos diagonales. Por ejemplo, el área del

rombo del dibujo es: $\frac{AC \cdot BD}{2}$.

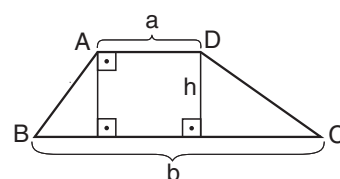
TRAPECIO

El **trapecio** es un cuadrilátero que tiene **solamente** un par de lados paralelos. Los lados paralelos se llaman **bases** del trapecio. Puesto que las bases no son iguales, hablamos de "la base mayor" y de "la base menor" del trapecio.

La altura del trapecio es la longitud de un segmento perpendicular a las bases y que une una a la otra.

El **área del trapecio** es igual a la mitad del producto de la altura por la suma de las bases.

Por ejemplo en el dibujo, el área del trapecio es: $\frac{h \cdot (a+b)}{2}$

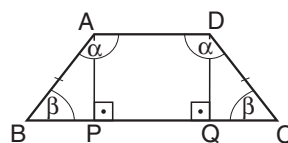


Trapecio isósceles es un trapecio en el que los lados no paralelos son iguales. Por ejemplo, en el dibujo $AB = DC$.

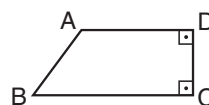
En un trapecio isósceles, los ángulos de la base mayor son iguales entre sí y los ángulos de la base menor son iguales entre sí. Por ejemplo, en el dibujo, $\angle ABC = \angle DCB = \beta$, $\angle BAD = \angle CDA = \alpha$.

Un trapecio isósceles puede dividirse en un rectángulo y dos triángulos rectángulos congruentes trazando las alturas desde los extremos de la base menor a la base mayor.

Se obtiene un rectángulo y dos triángulos rectángulos ABP y DCQ congruentes.



Trapecio rectángulo es un trapecio tal que uno de los ángulos de su base mayor es recto (y, también, por supuesto, uno de los ángulos de su base menor).



ROMBOIDE

El **romboide** es el cuadrilátero que se forma al unir por la base dos triángulos isósceles.

Por ejemplo, en el dibujo, el romboide ABCD está compuesto por los triángulos isósceles ABD y BCD ($CB = CD$, $AB = AD$).

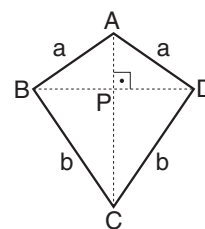
La diagonal que une los vértices de los dos triángulos isósceles corta por el punto medio a la diagonal que es la base de estos dos triángulos y es perpendicular a ella.

Por ejemplo, en el dibujo AC corta a BD en dos partes iguales y es perpendicular a BD. $AC \perp BD$

El **perímetro del romboide** del dibujo es $2a + 2b$.

El **área del romboide** es igual a la mitad del producto de las longitudes de sus diagonales. Por ejemplo, la superficie del romboide del dibujo es

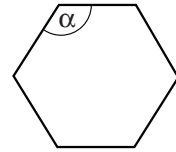
$\frac{AC \cdot BD}{2}$.



POLÍGONO REGULAR

Polígono regular es el polígono tal que todos sus lados son de igual longitud y todos sus ángulos interiores son de igual magnitud.

Por ejemplo: Un octágono regular es un polígono regular de 8 lados.
 Un pentágono regular es un polígono regular de 5 lados.
 Un cuadrado es un polígono regular de 4 lados.
 Un triángulo equilátero es un polígono regular de 3 lados.



Se puede calcular la magnitud del ángulo interior α de un polígono regular de n lados, mediante la fórmula siguiente:

$$\alpha = \left(180^\circ - \frac{360^\circ}{n}\right) = \left(\frac{180^\circ n - 360^\circ}{n}\right)$$

Por ejemplo, en el dibujo se muestra un hexágono regular. La magnitud de cada uno de sus ángulos interiores es 120° , pues, $\alpha = 180^\circ - \frac{360^\circ}{6} = 120^\circ$

LA CIRCUNFERENCIA, EL CÍRCULO

Radio es el segmento que une el centro de la circunferencia con un punto cualquiera de su perímetro.

Cuerda es un segmento que une dos puntos del perímetro de la circunferencia.

Diámetro es una cuerda que pasa por el centro de la circunferencia. La longitud del diámetro es el doble de la longitud del radio. Si indicamos la longitud del radio por medio de r , entonces, la longitud del diámetro es $2r$.

El perímetro de una circunferencia de radio r es $2\pi r$ (el valor de π es aproximadamente 3.14).

El área del círculo de radio r es πr^2 .

Una parte del perímetro de la circunferencia que está entre dos de sus puntos se llama un **arco**.

Una parte del círculo que está entre dos radios y un arco se llama **sector circular** o simplemente **sector**.

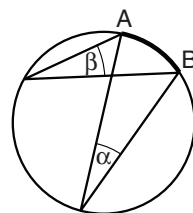
Ángulo inscripto

Un ángulo inscripto es un ángulo cuyo vértice es un punto del perímetro de la circunferencia y sus lados son cuerdas de la circunferencia.

Ángulos inscriptos que están apoyados sobre un mismo arco son de igual magnitud.

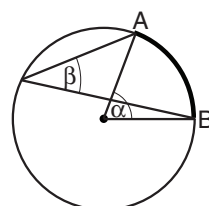
Por ejemplo, en el dibujo, los ángulos α y β son ángulos inscriptos apoyados sobre un mismo arco AB, y por lo tanto son iguales $\alpha = \beta$.

Un ángulo inscripto que se apoya sobre el diámetro, (es decir, apoyado sobre un arco de medio giro) es un ángulo recto.



Ángulo central

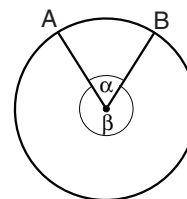
Ángulo central es el ángulo cuyo vértice está en el centro de la circunferencia y cuyos lados son radios de la circunferencia. El ángulo central equivale al doble del ángulo inscripto que se apoya sobre el mismo arco. Por ejemplo, en el dibujo, α es el ángulo central y β el ángulo inscripto que se apoyan sobre el mismo arco AB, y por lo tanto, $\alpha = 2\beta$.



Longitud del arco

Dos puntos cualesquiera A y B, sobre una circunferencia determinan dos arcos. Por ejemplo, en el dibujo, uno corresponde al ángulo central α y el otro corresponde al ángulo central β . El arco más corto AB es el que corresponde al ángulo más pequeño, α .

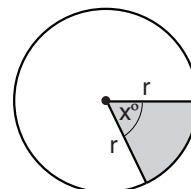
Si r es el radio de la circunferencia la longitud de este arco es $2\pi r \cdot \frac{\alpha}{360}$.



Área del sector circular

El sector circular es la porción de círculo encerrada entre dos radios y un arco. Por ejemplo, el sector sombreado en el dibujo es el sector circular cuyo ángulo central es x° .

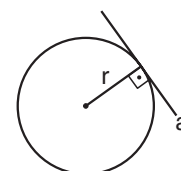
El área del sector circular es $\pi r^2 \cdot \frac{x}{360}$.



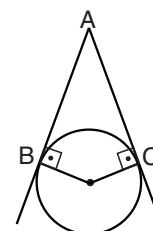
Tangente a una circunferencia

Tangente a una circunferencia es una recta que tiene como intersección con la circunferencia un único punto. Dicho punto se llama "punto de tangencia". El ángulo entre la tangente y el radio (en el punto de tangencia) es un ángulo recto.

Por ejemplo, en el dibujo la recta a es una tangente a la circunferencia de radio r .



Dos rectas tangentes a una misma circunferencia y que se cortan en un punto son también dos tangentes a la circunferencia que salen de un mismo punto. La longitud de cada una de las tangentes es la longitud del segmento que une el punto de intersección de las dos rectas con su punto de tangencia. Las tangentes a la circunferencia que salen de un mismo punto son de igual longitud. Por ejemplo, en el dibujo, A es el punto de intersección, B y C son puntos de tangencia, por lo tanto, $AB = AC$.



Polígono que circunscribe una circunferencia

Un polígono que circunscribe una circunferencia es un polígono tal que todos sus lados son tangentes a la circunferencia.

Polígono inscripto en una circunferencia

Un polígono inscripto en una circunferencia es un polígono cuyos vértices se encuentran sobre el perímetro de la circunferencia.

Triángulo inscripto

Todo triángulo puede inscribirse en una circunferencia.

Todo triángulo tiene una única circunferencia que lo circunscribe.

Si el triángulo fuera rectángulo puede ser inscripto en una circunferencia que tiene por centro el punto medio de la hipotenusa.

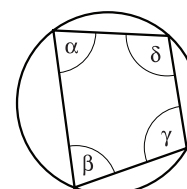
Cuadrilátero inscripto en una circunferencia

No todo cuadrilátero puede ser inscripto en una circunferencia.

En un cuadrilátero inscripto en una circunferencia la suma de los ángulos opuestos vale siempre 180° . Por ejemplo, en el cuadrilátero del dibujo:

$$\alpha + \gamma = 180^\circ$$

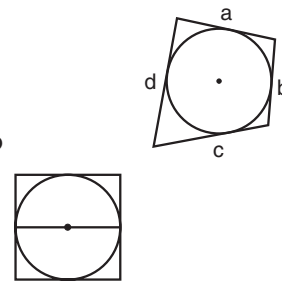
$$\beta + \delta = 180^\circ$$



Cuadrilátero que circunscribe una circunferencia

No todo cuadrilátero puede circunscribir una circunferencia. Si un cuadrilátero circunscribe a una circunferencia la suma de cada par de lados opuestos debe ser de igual longitud. Por ejemplo, en el cuadrilátero del dibujo, $a + c = b + d$.

Cuando el cuadrilátero que circunscribe una circunferencia es un cuadrado, la longitud del lado del cuadrado es igual al diámetro de la circunferencia.

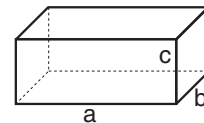


FORMAS TRIDIMENSIONALES (CUERPOS)

Caja y cubo

Una caja es un cuerpo tridimensional con seis caras rectangulares. Las tres dimensiones de la caja son el largo, el ancho y la altura (a , b y c en correspondencia con el dibujo).

Cada cara es perpendicular a las contiguas.

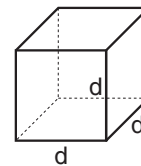


El área de la caja es la suma de las áreas de cada una de sus caras.

El área de la caja del dibujo es $ab + ac + bc + ab + ac + bc = 2ab + 2ac + 2bc$.

El volumen de la caja es el producto del largo por el ancho por el alto. El volumen de la caja del dibujo es $a \cdot b \cdot c$.

El cubo es una caja en la que largo, alto y ancho son de igual longitud. En el cubo las superficies de las caras son iguales entre sí.

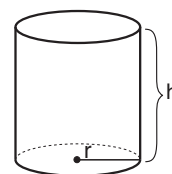


El área de cada cara del cubo del dibujo es d^2 y, por lo tanto, **área del cubo** es $6d^2$ y su **volumen** es d^3 .

Cilindro

Un cilindro recto es un cuerpo tridimensional que posee dos bases que son círculos congruentes y se hallan en planos paralelos y una envoltura que une las bases. La línea que une los centros de las bases es perpendicular a cada una de ellas.

El área de la superficie lateral del cilindro de base de radio r y de altura h es el producto del perímetro de la base por la altura del cilindro, o sea, $2\pi r \cdot h$.



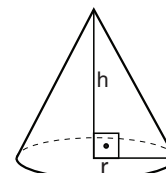
El área de la superficie total del cilindro es la suma de las áreas de las dos bases más el área de la superficie lateral. El área de cada una de las bases es πr^2 y el área de la superficie lateral es $2\pi r \cdot h$, el área de la superficie total será, entonces, $2\pi r \cdot h + 2\pi r^2 = 2\pi r \cdot (h + r)$.

El volumen del cilindro es el producto del área de una de sus bases por la altura; es decir: $\pi r^2 \cdot h$.

Cono

Un cono recto es un cuerpo tridimensional que se forma al unir todos los puntos de una circunferencia con un punto exterior al plano de ésta. Dicho punto se llama vértice del cono y está sobre una recta perpendicular al plano de la circunferencia y pasa por su centro (ver dibujo).

El volumen del cono de base de radio r y altura h es $\frac{\pi r^2 \cdot h}{3}$.



Prisma

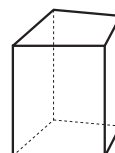
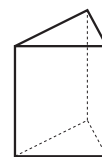
El **prisma recto** es un cuerpo tridimensional cuyas dos bases son polígonos congruentes que se encuentran en planos paralelos y cuyas caras son rectangulares. Todo prisma recibe su nombre de la forma de la base. Por ejemplo, el prisma triangular es el prisma cuya base es un triángulo; un prisma cuadrilátero es un prisma cuyas bases son cuadriláteros, etc. (ver dibujos).

La **altura del prisma** es la longitud del segmento que une las bases y que es perpendicular a ellas. Es decir, es la distancia entre las bases del prisma.

El **área de la superficie lateral del prisma** es la suma de las áreas de las superficies de todas las caras laterales del prisma. Se calcula también como el producto del perímetro de la base por la altura.

El **área de la superficie total del prisma** es la suma de las áreas de las dos bases más el área de la superficie lateral.

El **volumen del prisma** es el producto del área de una de sus bases por la altura del prisma.



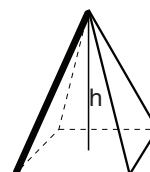
Pirámide

La **pirámide recta** es el cuerpo tridimensional que resulta de unir los vértices de un polígono regular cualquiera con un punto que no pertenece al plano del polígono y que se llama el "vértice de la pirámide". El polígono se llama "base de la pirámide".

Las caras laterales de la pirámide son triangulares. Cada pirámide recibe su nombre del número de lados de su base. Así, se habla de pirámides triangulares cuando la base es un triángulo, pirámides cuadriláteras, cuando su base es un cuadrilátero, etc. (ver dibujos).

La **altura de la pirámide** es la longitud del segmento que une el vértice de la pirámide con la base y que es perpendicular a ella. Es decir, es la distancia entre la base de la pirámide y su vértice (ver dibujo).

Si S es el área de la base de la pirámide y su altura es h , entonces, el **volumen de la pirámide** es $\frac{S \cdot h}{3}$



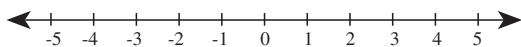
Arista

La **arista** de un cuerpo tridimensional es una línea recta formada por la intersección de dos caras. En la pirámide del dibujo, el segmento destacado es una de sus aristas.

La caja tiene 12 aristas.

EL EJE DE LOS NÚMEROS

El eje de los números permite dar una presentación geométrica de las relaciones entre los números.



Los números sobre el eje crecen cuando se avanza de izquierda a derecha.

La distancia entre dos puntos sobre el eje numérico es proporcional a la diferencia entre los valores numéricos que corresponden a los puntos.

Por ejemplo, la distancia entre los puntos que corresponden a los valores (-4) y (-2) es igual a distancia entre los puntos que corresponden a los valores 3 y 5.

Sistema de ejes cartesianos

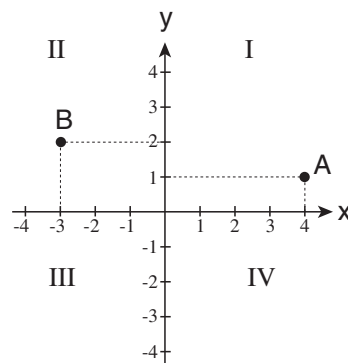
En un sistema de ejes cartesianos en el plano hay dos ejes numéricos ortogonales. El eje horizontal o de abscisas se denomina el eje x , y el eje vertical o eje de ordenadas se denomina eje y . En el eje x los números crecen cuando se avanza hacia la derecha y en el eje y los números crecen cuando se avanza hacia arriba.

Los dos ejes dividen al plano en cuatro cuadrantes que se numeran como en el dibujo con números romanos I, II, III y IV.

Cada punto del plano se corresponde con un par de valores x e y que describen la posición en relación a los ejes.

Por ejemplo, en el dibujo, el valor x del punto A es 4, y su valor y es 1. El valor x del punto B es (-3) y el valor y es 2.

Se conviene indicar las coordenadas de un punto dando un par de valores entre paréntesis de modo que el valor de x se halla a la izquierda del valor de y , así: (x, y) . A veces se indican los valores del punto junto a la letra que lo representa; por ejemplo, el punto A se indicará $A(4, 1)$ y el punto B, $B(-3, 2)$.



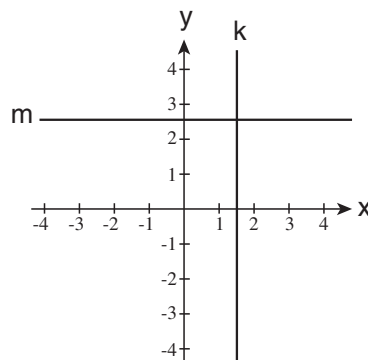
A veces se llama a los valores del punto (x, y) "**coordenadas del punto**".

El punto del plano que corresponde al $(0, 0)$ es el punto de intersección de los ejes y se llama "**origen de los ejes coordenados**".

Todos los puntos sobre la recta paralela al eje x tienen el mismo valor y , y todos los puntos sobre la recta paralela al eje y tienen el mismo valor x .

Por ejemplo, en el dibujo la recta k es paralela al eje y y por lo tanto, todos los puntos de la recta k tienen el mismo valor x . (En el dibujo es $x = 1.5$)

La recta m es paralela al eje x , y por lo tanto, todos los puntos de la recta m tienen el mismo valor y . (En el dibujo es $y = 2.5$)



Por dos puntos cualesquiera del plano pasa una sola recta.
La parte de esa recta que está entre dos puntos se llama segmento.

Si el segmento es paralelo al eje y , su longitud es la diferencia (en valor absoluto) entre los valores y de los puntos.

Por ejemplo, en el dibujo, el segmento AB es paralelo al eje y .

El valor y del punto A es 4 y el valor y del punto B es (-3) .

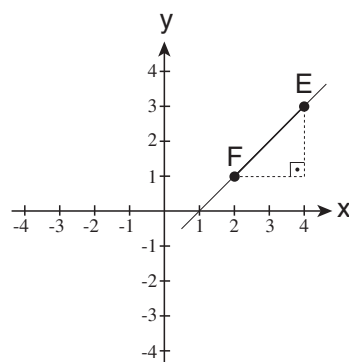
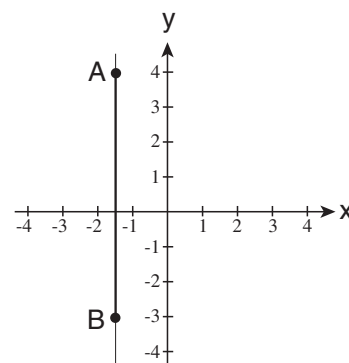
La diferencia entre ambos en valor absoluto es $4 - (-3) = 7$ y por lo tanto, la longitud del segmento AB es 7.

Análogamente se calcula la longitud de un segmento paralelo al eje x .

Si el segmento no es paralelo a ninguno de los ejes (por ejemplo, el segmento EF del dibujo), se puede calcular su longitud utilizando el teorema de Pitágoras: se dibuja un triángulo rectángulo cuya hipotenusa es dicho segmento, y sus catetos son segmentos paralelos a los dos ejes, x e y .

La longitud del cateto paralelo al eje x equivale a la diferencia entre los valores x de los dos puntos E y F ($4 - 2 = 2$), y la longitud del cateto paralelo al eje y equivale a la diferencia de los valores y de los puntos E y F ($3 - 1 = 2$). Con ayuda del teorema de Pitágoras se puede calcular, por lo tanto, la longitud de la

hipotenusa: $EF = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8}$



PREGUNTAS Y PROBLEMAS

Las preguntas del área de álgebra tratan de un cierto número de temas tales como: resolución de ecuaciones, problemas de camino recorrido y de rendimiento, combinatoria, probabilidad, etc. Las preguntas de geometría tratan de características de figuras geométricas como superficies, volúmenes, ángulos, etc. Algunas de las preguntas son verbales, y en ellas hay que traducir primeramente el problema a términos matemáticos; otras son preguntas no verbales en las que el problema está expresado desde un principio en términos matemáticos. A continuación ofrecemos preguntas de ejemplo, acompañadas de sus soluciones y explicaciones.

Presten atención: los ejemplos de esta guía están clasificados según las clases diferentes de problemas, pero el examen no está dividido de esta manera.

PREGUNTAS VERBALES DE ÁLGEBRA

1. Un conductor viajó de Haifa a Eilat. Un tercio del camino lo recorrió a una velocidad de 75 km/h. Un quinto del resto del camino lo recorrió en una hora, y el tramo restante lo recorrió a una velocidad de 80 km/h. La distancia entre Haifa y Eilat es de 450 km. Si hubiera viajado a una velocidad constante a lo largo de todo el recorrido, ¿cuál debería haber sido esa velocidad para que el viaje entre Haifa y Eilat le insumiera el mismo tiempo?

- (1) 70 km/h
- (2) 75 km/h
- (3) 80 km/h
- (4) 90 km/h

Esta pregunta está presentada en forma verbal, y por lo tanto, primeramente hay que traducirla a términos matemáticos. Primero, definan qué es lo que se debe averiguar: o sea, **la velocidad** a la que hay que viajar para recorrer **la distancia** entre Haifa y Eilat en el mismo **tiempo** que le insumió al conductor de la pregunta.

Siendo así, se trata de un problema de recorrido, y se puede aplicar la fórmula que vincula distancia con velocidad y con tiempo: $v = \frac{s}{t}$, pues la distancia (s) está dada y el tiempo (t) se puede calcular, mientras que la velocidad (v) es la incógnita que hay que despejar.

Se anuncia en la pregunta que la distancia entre Haifa y Eilat es de 450 km.

El tiempo total en el que el conductor debía recorrer toda la distancia entre Haifa y Eilat se puede calcular así:

El camino está dividido en la pregunta en tres segmentos. Veamos en cuánto tiempo el conductor recorrió cada uno de ellos:

- A. Un tercio del camino son **150 km** pues $450 \cdot \frac{1}{3}$ son 150 km. Este segmento del camino lo recorrió el conductor **en dos horas**, pues es lo que se requiere para recorrer 150 km a una velocidad de 75 km/h $\left(\frac{150}{75} = 2\right)$.
- B. Un quinto del resto del camino son **60 km**. Esto se puede calcular sabiendo que la longitud del resto del camino es $450 - 150 = 300$ km, y $\frac{1}{5}$ de 300 km son 60 km. Se informa en la pregunta que el conductor recorrió este tramo del camino **en una hora**.
- C. El resto del camino son **240 km**, pues $450 - 150 - 60 = 240$. Este tramo lo recorrió el conductor **en tres horas** pues se requieren tres horas para recorrer 240 km a una velocidad de 80 km/h.

Es decir que el viaje desde Haifa hasta Eilat insumió un total de 6 horas (dos horas más una hora más tres horas). Ahora se puede calcular la velocidad constante a la que hay que recorrer los 450 km para recorrerlos en 6 horas, reemplazando los datos en la fórmula: $t = 6$; $s = 450$ km;

$v = \frac{s}{t} = \frac{450}{6} = 75$. O sea: la velocidad $v = 75$ km/h y la respuesta correcta es la (2).

2. A los diez días de vida un elefantito comió 5 caramelos. A partir de entonces su apetito creció y cada día comió dos veces el número de caramelos que comió el día anterior. ¿Cuántos caramelos comió en el día 14 de vida?

- (1) 40
- (2) 80
- (3) 100
- (4) 120

En su décimo día de vida el elefantito comió 5 caramelos. Puesto que de aquí en más comerá cada día 2 veces el número de caramelos que comió el día anterior, en su día 11 de vida, comerá 10 caramelos ($5 \cdot 2$); en el día 12 de vida comerá 20 caramelos ($5 \cdot 2 \cdot 2$), y así sucesivamente. En general, si n es un número entero positivo, entonces, en el día $(10 + n)$ de vida el elefantito comerá $5 \cdot 2^n$ caramelos. Por lo tanto, en el día 14 de vida comerá 80 caramelos ($5 \cdot 2^4 = 80$), y la respuesta correcta es la (2).

3. En el marco de un menú de almuerzos de trabajo, en un restaurante se puede elegir uno de 3 platos de entrada y uno de 4 platos principales diferentes. Además de la entrada y del plato principal, se puede optar, como plato adicional, entre una sopa o un postre. ¿Cuántas posibilidades diferentes de almuerzo de trabajo de 3 platos se pueden formar en ese restaurante?

- (1) 12
- (2) 14
- (3) 18
- (4) 24

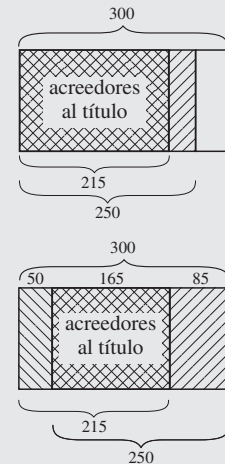
Hay **tres** posibilidades para la elección de la entrada, y por cada una de las entradas se puede combinar uno de los **cuatro** platos principales. Es decir, hay $3 \cdot 4$ combinaciones diferentes de entrada y plato principal y a cada una de las 12 combinaciones se le puede agregar o sopa o postre, es decir $12 \cdot 2$, o sea, 24 combinaciones diferentes de una comida de 3 platos. Por lo tanto, la respuesta correcta es la (4).

4. Un estudiante recibe su primer título sólo si pasa todos sus exámenes y presenta todos sus trabajos. De 300 estudiantes, 250 pasaron todos los exámenes y 215 presentaron todos los trabajos. ¿Cuántos estudiantes recibieron su primer título?

- (1) Por lo menos 215
- (2) A lo sumo 185
- (3) Exactamente 215
- (4) Por lo menos 165

Se pueden definir dos conjuntos de estudiantes: el conjunto de los estudiantes que pasaron todos los exámenes y el conjunto de los estudiantes que presentaron todos los trabajos. Todo estudiante que se encuentre a la vez en ambos conjuntos se ha hecho acreedor al título. El grado de coincidencia de los dos conjuntos es desconocido, pero hay dos situaciones extremas posibles que representaremos en un dibujo:

- En el caso de **coincidencia máxima** entre los dos conjuntos de estudiantes, el número de acreedores al título será también máximo. La coincidencia máxima se producirá si los 215 estudiantes que entregaron todos los trabajos han pasado también todos los exámenes. Es decir, 215 estudiantes **a lo sumo** pueden recibir título.
- En el caso de una **coincidencia mínima** entre los dos conjuntos de estudiantes, el número de acreedores al título será mínimo. Cincuenta (50) estudiantes, $(300 - 250)$, no son acreedores al título por no haber pasado todos los exámenes, y 85 $(300 - 215)$ no son acreedores al título por no haber presentado todos los trabajos. Es decir, el número de estudiantes que no son acreedores al título debido a -por lo menos- una de las causas es, $50 + 85 = 135$. Este es el número máximo de estudiantes no acreedores al título. Por lo tanto, el número mínimo de acreedores a título es $300 - 135 = 165$, es decir, **por lo menos** 165 estudiantes son acreedores al título.



Siendo así, el número de acreedores al título puede fluctuar entre 165 y 215. Por lo tanto, la respuesta correcta es la (4).

5. Una fábrica que trabaja a un ritmo constante produce 20 automóviles en 4 días. ¿Cuántos automóviles es posible fabricar en tres fábricas similares, que trabajan al mismo ritmo, en 6 días?
- (1) 60
(2) 80
(3) 90
(4) 120

Esta es una pregunta de rendimiento. Uno de los caminos para dar respuesta a preguntas de este tipo es encontrar el rendimiento de una unidad de producción (en este caso de una fábrica) en la unidad de tiempo (en este caso un día) y luego multiplicar por el número de unidades de producción (3 fábricas) y por el número de unidades de tiempo requeridas (6 días). Si la fábrica produce 20 automóviles en 4 días, produce 5 automóviles por día $\left(\frac{20}{4} = 5\right)$. Por lo tanto, 3 fábricas en 6 días producirán $5 \cdot 6 \cdot 3$ automóviles, o sea, 90 automóviles, y la respuesta correcta es la (3).

6. En una caja había 20 sombreros blancos y 13 sombreros negros. Jorge extrajo al azar de la caja tres sombreros uno tras otro sin restituirlos a la caja, y los tres sombreros extraídos resultaron negros.

¿Cuál es la probabilidad de que el cuarto sombrero extraído al azar sea también negro?

- (1) $\frac{13}{33}$
- (2) $\frac{10}{33}$
- (3) $\frac{1}{3}$
- (4) $\frac{1}{33}$

Deben ustedes calcular la probabilidad de que Jorge extraiga un sombrero negro, luego de haber extraído con anterioridad otros tres sombreros negros. La probabilidad de ello está dada por el número de sombreros negros que quedaron en la caja dividido por el número total de sombreros restantes (blancos y negros) en la caja. Por lo tanto, luego de haber extraído tres sombreros negros, quedan en la caja 10 sombreros negros y 20 blancos. Es decir, de 30 sombreros en la caja, 10 son negros. Por lo tanto, la probabilidad de que Jorge extraiga un sombrero negro es de $\frac{10}{30}$, o sea, $\frac{1}{3}$, y la respuesta correcta es, por lo tanto, la (3).

PREGUNTAS NO VERBALES

1. Dato: $2^x \cdot 2^y = 32$

$$x + y = ?$$

- (1) 8
- (2) 7
- (3) 5
- (4) 4

Según las reglas de la potenciación, en el producto de potencias de igual base se pueden sumar los exponentes, de modo que $2^x \cdot 2^y = 2^{x+y}$. Según el dato $2^{x+y} = 32$. Para poder encontrar el valor de la expresión $x + y$, expresaremos 32 como una potencia de base 2 así: $2^5 = 32$. Por lo tanto $2^{x+y} = 2^5$. Dado que si dos potencias de igual base son iguales, sus exponentes también son iguales, concluiremos que $x + y = 5$.

La respuesta correcta será entonces la (3).

2. El promedio de tres números x , y , y z es $x \cdot y$.

$$z = ?$$

- (1) $3 \cdot x \cdot y - x - y$
- (2) $x \cdot y - x - y$
- (3) $3 \cdot x \cdot y + x + y$
- (4) $3 \cdot x \cdot y - (x - y)$

El promedio es la suma de los términos dividida por el número de términos. Por lo tanto, la media aritmética de x , y , y z es $\frac{x+y+z}{3}$.

Pongamos los datos del problema en una ecuación: $\frac{x+y+z}{3} = x \cdot y$

Multiplicando ahora por 3 a ambos lados de la igualdad resulta:

$$x + y + z = 3 \cdot x \cdot y$$

Y despejando z : $z = 3 \cdot x \cdot y - x - y$.

La respuesta correcta es entonces la (1).

3. Para dos números a y b cualesquiera se ha definido la operación $\$$ del siguiente modo:

$$\$(a, b) = a \cdot (a + b)$$

$$\$(\$(2, 0), 1) = ?$$

- (1) 20
- (2) 12
- (3) 10
- (4) 4

En la expresión $\$(\$(2, 0), 1)$, cuyo valor se debe encontrar, $a = \$(2, 0)$ y $b = 1$.

Según la definición de la operación $\$(\$(2, 0), 1) = \$(2, 0) \cdot (\$(2, 0) + 1)$

Siendo así, para calcular el valor de la expresión buscado hay que calcular primeramente $\$(2, 0)$.

Según la definición de la operación $\$(2, 0) = 2 \cdot (2 + 0) = 4$.

Reemplazando el valor obtenido para $\$(2, 0)$ en la expresión buscada obtendremos

$$\$(\$(2, 0), 1) = \$(4, 1).$$

Según la definición de la operación $\$(4, 1) = 4 \cdot (4 + 1) = 20$, y la respuesta correcta es la (1).

4. Dato: $B < C$
 $B < D < A$

¿Cuál de las siguientes opciones es necesariamente cierta?

- (1) $C < D$
- (2) $D < C$
- (3) $C < A$
- (4) Ninguna de las opciones anteriores es necesariamente cierta

De los datos no se puede inferir nada sobre las relaciones de las magnitudes entre C y A y D . Tres situaciones son posible según los datos:

- i. $B < C < D < A$
- ii. $B < D < C < A$
- iii. $B < D < A < C$

La opción (1) es cierta en el caso i, pero no es cierta los casos ii y iii. La opción (2) es cierta en el caso ii y iii, pero no en el caso i. La opción (3) es cierta en los casos i y ii, pero no en el caso iii. Por lo tanto, cada una de las opciones presentadas puede ser cierta en algunos casos y falsa en otros. En consecuencia ninguna de las opciones (1) - (3) es **necesariamente** cierta y la respuesta correcta es la (4).

5. K es un número par y P es un número impar.

¿Cuál de las siguientes proposiciones **no** es cierta?

- (1) $P - K - 1$ es un número impar
- (2) $P + K + 1$ es un número par
- (3) $P \cdot K + P$ es un número impar
- (4) $P^2 + K^2 + 1$ es un número par

Analicemos cada una de las proposiciones:

- (1) La diferencia entre un número impar (P) y un número par (K) es impar. Por lo tanto $P - K$ es impar y si le restamos 1 obtendremos un número par. Por lo tanto, $(P - K - 1)$ es un número **par** y la proposición de (1), por lo tanto, **no es** cierta.
- (2) La suma de un número impar P más un número par K es impar, de modo que $P + K$ es impar y si le sumamos 1 al impar obtenido, obtendremos un número par. Por lo tanto, $(P + K + 1)$ es **par** y la proposición de (2) es **cierta**.
- (3) El producto de un número par por un número entero cualquiera es par, por lo tanto, $P \cdot K$ es siempre par. Si a eso le sumamos el número impar P , obtenemos un número impar. $P \cdot K + P$ es en consecuencia **impar** y la proposición de (3) es **cierta**.
- (4) El cuadrado de un número impar (P^2) es impar, pues es el producto de impar por impar ($P \cdot P$); y el cuadrado K^2 de un número par es par, pues es el producto de par por par ($K \cdot K$). La suma de los dos cuadrados, $(P^2 + K^2)$ será impar, pues es la suma de un par más un impar, por lo tanto, cuando le sumemos 1, obtendremos un número par. $P^2 + K^2 + 1$ es por lo tanto un número **par** y la proposición (4) es **cierta**.

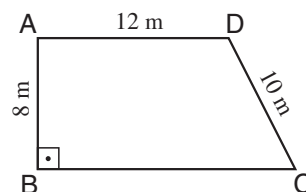
En la pregunta se nos ha pedido indicar la proposición que **no es** cierta, por lo tanto la respuesta correcta es la (1).

GEOMETRÍA

1. En el dibujo que les presentamos hay un trapecio rectángulo ($AD \parallel BC$).

Según estos datos y los datos del dibujo ¿cuál es el área del trapecio (en m^2)?

- (1) 150
- (2) 120
- (3) 108
- (4) 96



La fórmula del área del trapecio es $S = \frac{(a+b) \cdot h}{2}$ siendo a la base mayor, b la base menor y h la altura del trapecio. El trapecio dado es rectángulo y por lo tanto el lado perpendicular a las bases es igual a la altura del trapecio. En el dibujo se dan la altura 8 m, la longitud de la base menor 12 m, pero falta la longitud de la base mayor. Para calcularla trazamos por D una perpendicular a la base BC (DE ver dibujo). Obtenemos un rectángulo $ABED$ cuyo largo es 12 m y su ancho es 8 m. De aquí sabemos, entonces, que BE es 12 y DE es 8. Debemos ahora calcular la longitud de EC para saber cuál es la longitud de la base mayor del trapecio. La longitud de EC la podemos calcular por medio del teorema de Pitágoras.

En el triángulo rectángulo DEC ,

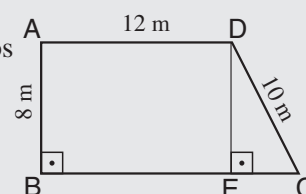
$$DC^2 = DE^2 + EC^2.$$

$$\text{Despejando } EC : EC = \sqrt{DC^2 - DE^2} \quad EC = \sqrt{10^2 - 8^2} = 6$$

La longitud de la base mayor es entonces 18 m, (12m + 6m).

$$\text{Calculamos el área del trapecio: } S = \frac{(12 + 18) \cdot 8}{2} = 120$$

Por lo tanto, el área del trapecio es $120 m^2$ y la respuesta correcta es la (2).

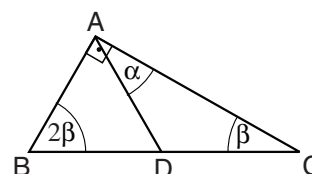


2. ABC es un triángulo rectángulo y ABD es un triángulo isósceles ($AB=AD$).

Según estos datos y los datos del dibujo,

$$\alpha = ?$$

- (1) 60°
- (2) 45°
- (3) 30°
- (4) 25°



La suma de los ángulos interiores de un triángulo vale 180° . Por lo tanto, en el triángulo ABC se cumple la ecuación $90^\circ + 2\beta + \beta = 180^\circ$.

Resolviendo la ecuación se llega a que $\beta = 30^\circ$.

Se sabe que el triángulo ABD es isósceles. De aquí se infiere que $\angle ADB = \angle ABD$.

$\angle ABD = 2\beta = 60^\circ$, y por lo tanto, también $\angle ADB = 60^\circ$.

En el triángulo ABD se cumple que $\angle BAD + \angle ADB + \angle ABD = 180^\circ$, es decir,

$$\angle BAD = 180^\circ - \angle ABD - \angle ADB$$

Reemplazando por los valores de los ángulos ya calculados obtenemos que

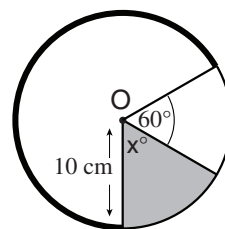
$$\angle BAD = 180^\circ - 60^\circ - 60^\circ = 60^\circ$$

Según el dibujo, $\angle BAD + \alpha = \angle BAC$. Reemplazando los valores de los ángulos calculados obtenemos $60^\circ + \alpha = 90^\circ$. Por lo tanto, $\alpha = 30^\circ$, y la respuesta correcta es la (3).

3. En el dibujo que les presentamos, hay una circunferencia de centro O y de 10 cm de radio.
Dato: El área sombreada equivale a $\frac{1}{6}$ del área del círculo.

Según estos datos y los del dibujo, ¿cuál es la longitud del arco destacado (en cm)?

- (1) 30π
- (2) $\frac{40\pi}{3}$
- (3) $\frac{20\pi}{3}$
- (4) 20π



La longitud del arco destacado equivale al perímetro de la circunferencia, menos la longitud del arco que no está destacado. Para encontrar la longitud del arco que no está destacado se debe encontrar la magnitud del ángulo al centro que se apoya sobre él. Este ángulo es $x^\circ + 60^\circ$ (como se da en el dibujo). x es el ángulo al centro del sector sombreado y su magnitud se puede calcular a partir de la fórmula del área del sector circular : $\pi r^2 \cdot \frac{x}{360}$.

Se sabe que ese sector sombreado equivale a $\frac{1}{6}$ del área del círculo, es decir $\frac{\pi r^2}{6}$ (pues el área completa del círculo es πr^2).

Por lo tanto, se obtendrá la ecuación: $\pi r^2 \cdot \frac{x}{360} = \frac{\pi r^2}{6}$, simplificando πr^2 de ambos miembros:

$$\frac{x}{360} = \frac{1}{6} \text{ y despejando } x: \quad x = \frac{360}{6} = 60$$

Siendo así, el ángulo que comprende al arco que no está destacado es

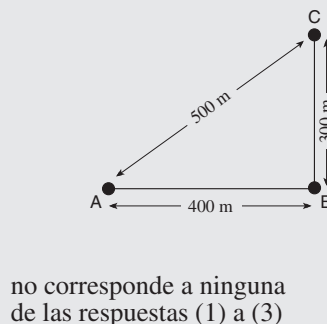
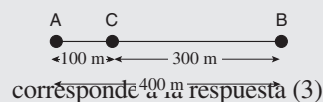
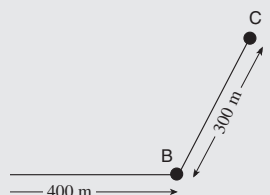
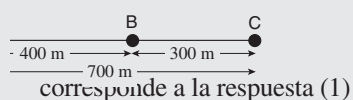
$$x^\circ + 60^\circ = 60^\circ + 60^\circ = 120^\circ.$$

La longitud del arco que se apoya sobre dicho ángulo es $2\pi r \cdot \frac{120}{360} = 2\pi r \cdot \frac{1}{3}$, o sea $\frac{1}{3}$ del perímetro de la circunferencia. Por lo tanto, la longitud del arco destacado es $\frac{2}{3}$ del perímetro de la circunferencia. El perímetro de la circunferencia (en cm) es $2\pi r = 2\pi \cdot 10 = 20\pi$: y por lo tanto $\frac{2}{3}$ del perímetro de la circunferencia es $\frac{2}{3} \cdot 20\pi = \frac{40\pi}{3}$. Es decir, la longitud del arco destacado es $\frac{40\pi}{3}$ cm, y la respuesta correcta es la (2).

4. La distancia entre los puntos A y B es de 400 m. La distancia entre los puntos B y C es de 300 m. De aquí que la distancia entre los puntos A y C es **necesariamente** –

- (1) 100 metros
- (2) 500 metros
- (3) 700 metros
- (4) no se puede determinar a partir de los datos

Los datos de esta pregunta no proporcionan información respecto a la ubicación relativa de los tres puntos y podría presentarse una variedad de casos, como por ejemplo:

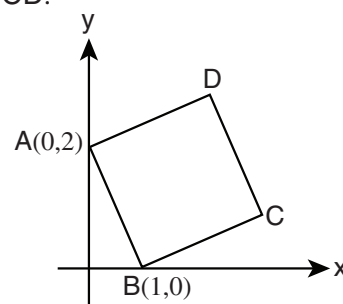


Todas estas situaciones son posibles y muchas más además de éstas, pero ninguna de ellas es necesariamente cierta. Por lo tanto, la respuesta correcta es la (4).

5. En el sistema de ejes que les presentamos se da un cuadrado ABCD.

Según este dato y los datos del dibujo, ¿cuál es el área del cuadrado?

- (1) No se puede saber a partir de los datos
- (2) 6
- (3) 5
- (4) 4



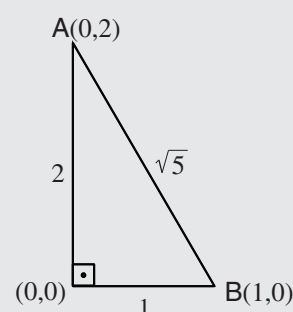
Para calcular el área del cuadrado se debe encontrar la longitud de su lado. La longitud del lado es la distancia entre dos vértices consecutivos cualesquiera, por ejemplo, el A y el B. Puesto que el segmento AB no es paralelo a ninguno de los ejes, calcularemos su longitud utilizando el teorema de Pitágoras.

El origen de coordenadas y los puntos A y B forman un triángulo rectángulo en el que AB es la hipotenusa. La longitud de un cateto es la distancia entre el origen de coordenadas (0, 0) y el punto A (0, 2), es decir, 2, y la longitud del otro cateto es la distancia entre el origen de coordenadas (0, 0) y el punto B (1, 0), es decir, 1.

Según el teorema de Pitágoras la longitud de la hipotenusa AB es $\sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{4 + 1} = \sqrt{5}$

Siendo así, la longitud del lado del cuadrado es $\sqrt{5}$, y de aquí, el área del cuadrado será $(\sqrt{5})^2 = 5$

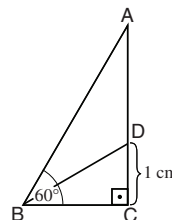
Por lo tanto, la respuesta correcta será la (3).



6. En el dibujo que les presentamos ABC es un triángulo rectángulo. BD es la bisectriz del ángulo ABC . Según estos datos y los datos del dibujo,

$AD = ?$

- (1) 1 cm
- (2) 2 cm
- (3) $\sqrt{3}$ cm
- (4) $\frac{4}{\sqrt{3}}$ cm



Según la suma de los ángulos interiores del triángulo ABC , $\angle BAD = 30^\circ$. A partir del dato de que BD es la bisectriz del $\angle ABC$, resulta que $\angle ABD = 30^\circ$.

En el triángulo ADB , $\angle BAD = \angle ABD$ y en consecuencia el triángulo ADB es un triángulo isósceles en el que $AD = BD$.

BD es también la hipotenusa del triángulo BDC . Este triángulo es un triángulo con ángulos de 30° , 60° y 90° y, por lo tanto, $BD = 2 \cdot DC = 2 \cdot 1 = 2$. Y dado que $AD = BD$, también $AD = 2$ cm. La respuesta correcta es la (2).

7. Un líquido, que llena una caja cuyas dimensiones son $2 \text{ cm} \times 10 \text{ cm} \times 20 \text{ cm}$, se vierte en su totalidad en un recipiente cilíndrico cuya base es de 5 cm de radio.
¿Qué altura (en cm) alcanzará el nivel del líquido en el recipiente cilíndrico?

- (1) $\frac{16}{\pi}$
- (2) $\frac{40}{\pi}$
- (3) 8π
- (4) 8

El volumen de la caja es el producto de sus tres dimensiones; por lo tanto, el volumen del líquido en el recipiente es igual a $20 \text{ cm} \cdot 10 \text{ cm} \cdot 2 \text{ cm}$, o sea, 400 cm^3 .

Luego de haber sido vertido en el recipiente cilíndrico, el volumen del líquido no se altera. Ahora se debe encontrar la altura de dicho cilindro del que se sabe que tiene base de 5 cm de radio, y 400 cm^3 de volumen. Dicha altura será la altura que alcance el líquido en el cilindro. La fórmula del volumen del cilindro es $V = \pi r^2 \cdot h$. Hay que determinar h sabiendo que $r = 5 \text{ cm}$, y que $V = 400 \text{ cm}^3$.

Reemplacemos los datos en la fórmula para calcular el volumen: $400 = \pi \cdot 5^2 \cdot h = \pi \cdot 25 \cdot h$.

Dividiendo por 25π a ambos lados de la igualdad para despejar h se llega a que

$h = \frac{400}{25\pi} = \frac{16}{\pi}$, y la respuesta correcta es, por lo tanto, la (1).

PREGUNTAS DE COMPRENSIÓN DE GRÁFICOS Y TABLAS

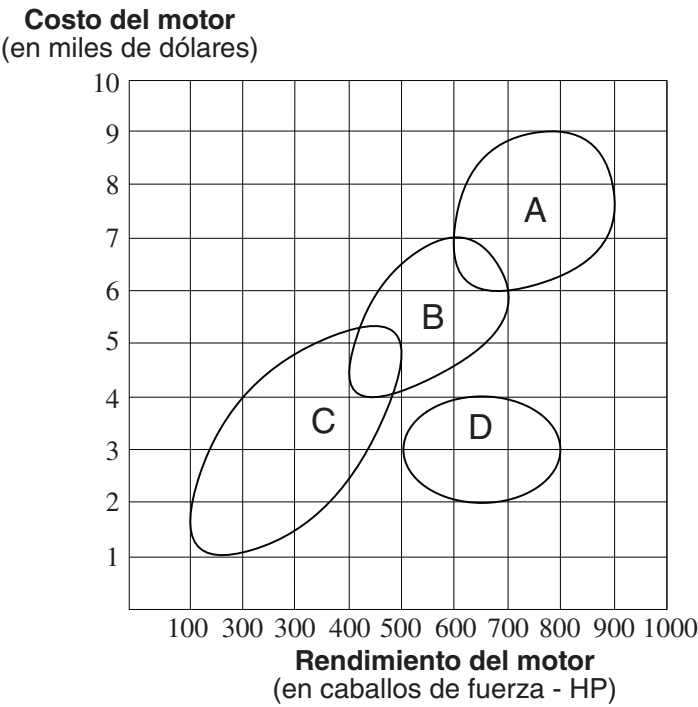
Estas preguntas tratan sobre la información suministrada en gráficos o tablas. El gráfico o la tabla están, por lo general, acompañados de una explicación breve. En la tabla se presentan los datos ordenados en filas y columnas. En los gráficos se presentan los datos en algún tipo de forma gráfica, por ejemplo, por medio de un gráfico, por medio de un diagrama de barras, etc. A continuación, les presentamos un gráfico y una tabla a modo de ejemplo y a continuación de ellos un cierto número de preguntas acompañadas de sus explicaciones.

COMPRENSIÓN DE GRÁFICOS

Estudien atentamente el siguiente gráfico y respondan a las preguntas que aparecen a continuación.

En el gráfico siguiente se presentan datos de cuatro diferentes tecnologías para la producción de un cierto tipo de motor. Cada tecnología está representada en el gráfico por medio de una letra (A-D) y por un campo cerrado. Todo punto del campo describe el rendimiento y el costo de un motor fabricado según la tecnología adecuada. Por ejemplo, por medio de la tecnología A se puede fabricar un motor que tenga un rendimiento de 750 HP (HP = caballos de fuerza) a un costo de 8,500 dólares; pero es imposible fabricar un motor con un rendimiento igual a un costo de 5,000 dólares.

Nota: Las tecnologías A y B comparten un área común, y lo mismo ocurre con las tecnologías B y C.



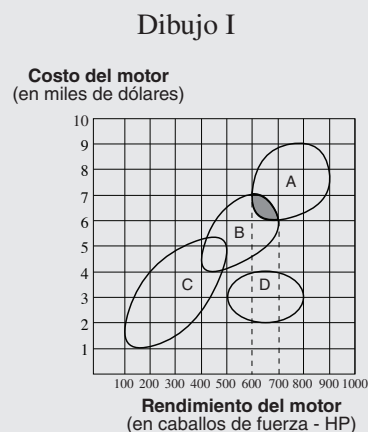
Presten atención: Al responder a cada pregunta no debes tomar en cuenta los datos que aparecen en otras preguntas.

PREGUNTAS Y EXPLICACIONES:

1. ¿Cuál es el intervalo de los rendimientos de los motores (en "caballos de fuerza" - HP) que se pueden fabricar tanto con la tecnología A como con la tecnología B?

- (1) 400-500
- (2) 500-600
- (3) 600-700
- (4) ninguna de las opciones es correcta

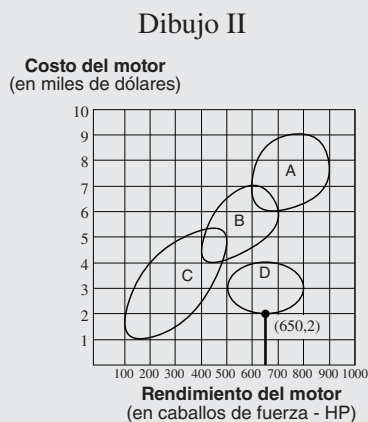
Para dar respuesta a preguntas de inferencia a partir de gráficos deben Uds. "traducir" la pregunta en términos del gráfico, y luego encontrar en el gráfico la información solicitada. La pregunta se ocupa de motores que se pueden fabricar con la tecnología A y también con la tecnología B. Los motores de ese tipo se representan en el gráfico en la intersección de los campos de las dos tecnologías (El campo sombreado en el dibujo I). Ahora deben Uds. encontrar el intervalo de rendimientos de esos motores. Los límites del campo de la intersección sobre el eje horizontal representan el intervalo de los rendimientos de los motores que se pueden fabricar con las dos tecnologías. Se puede ver que la zona común entre A y B está limitada entre 600 y 700 HP; o sea que con ambas tecnologías A y B se pueden fabricar motores cuyos rendimientos van de 600 a 700 HP y la respuesta correcta es la (3).



2. ¿Cuál es el costo mínimo al que se puede fabricar un motor con un rendimiento de 650 HP?

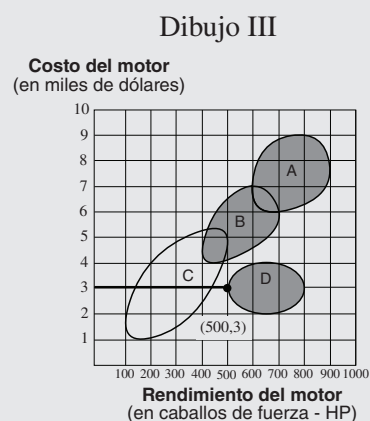
- (1) 1,000 dólares
- (2) 2,000 dólares
- (3) 1,500 dólares
- (4) 2,500 dólares

El punto de partida en esta pregunta es un motor con un rendimiento de 650 HP. Los rendimientos se representan en el gráfico sobre el eje horizontal, por lo tanto, en la primera etapa hay que encontrar ese rendimiento de motor deseado sobre el eje horizontal (650 HP), y en una segunda etapa debemos buscar el costo mínimo de un motor de ese rendimiento. Tracemos la vertical desde el punto que representa el rendimiento de 650 HP, hasta alcanzar uno de los campos (ver dibujo II). Este punto de contacto es el punto que representa el menor costo posible de un motor con rendimiento de 650 HP. El punto de contacto inferior está en el borde del campo de la tecnología D, y representa un costo de 2,000 dólares y, por lo tanto, ése es el costo mínimo de un motor con el rendimiento solicitado. Siendo así, la respuesta correcta es la (2).



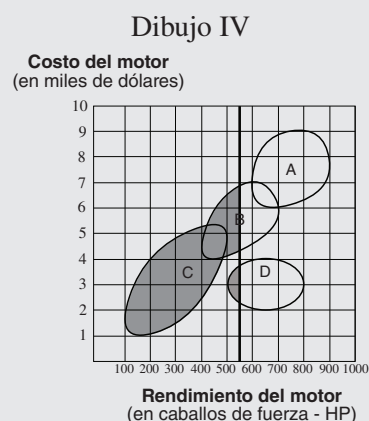
3. En una de las compañías que fabrica motores, se decidió interrumpir la utilización de la tecnología C.
- ¿Cuál será ahora el rendimiento mínimo (en HP) de un motor cuyo costo es de 3,000 dólares que la compañía podrá producir después de implementar la decisión?
- (1) 500
 - (2) 400
 - (3) 300
 - (4) no se puede fabricar un motor semejante

Puesto que se ha dicho en la pregunta que la fábrica interrumpirá la utilización de la tecnología C, nos desentenderemos del campo de esta tecnología, y nos referiremos sólo a los otros campos (los campos sombreados que aparecen en el dibujo III). El punto de partida para esta pregunta está en un motor cuyo precio es de 3,000 dólares. Los precios de los motores están representados sobre el eje vertical, por lo tanto debemos primeramente encontrar en el eje vertical el punto que representa el costo de 3,000 dólares. A medida que avanzamos desde este punto hacia la derecha aumenta el rendimiento del motor; por lo tanto, si trazamos una línea horizontal desde dicho punto (ver dibujo III), el primer punto de contacto con uno de los campos de tecnologías representará el rendimiento **más bajo** posible de un motor cuyo costo es de 3,000 dólares. El primer punto de contacto es con el campo de la tecnología D. Este punto está sobre la línea vertical que corresponde a 500 HP en el eje horizontal, y éste es ahora el rendimiento más bajo de un motor cuyo precio es de 3,000 dólares. Por lo tanto, la respuesta correcta es la (1).



4. A una compañía determinada le está prohibido fabricar motores de rendimiento superior a los 550 HP.
- ¿Cuáles son las tecnologías que esa compañía puede utilizar para fabricar sus motores?
- (1) sólo la C
 - (2) la B y la C solamente
 - (3) la C y la D solamente
 - (4) la B, la C y la D solamente

Partimos de un motor cuyo rendimiento es de 550 HP. Hallaremos el punto que representa el rendimiento de 550 HP sobre el eje horizontal, y trazaremos desde él hacia arriba a todo lo alto del dibujo, la vertical que pasa por ese punto (ver dibujo IV). Todos los motores que se encuentren a la derecha de la línea poseen un rendimiento mayor que 550 HP, y todos los motores que se encuentren a la izquierda de la línea poseen un rendimiento menor que 550 HP. A la compañía mencionada en la pregunta sólo le está permitido fabricar motores cuyo rendimiento es inferior a 550 HP, y por lo tanto, sólo puede usar tecnologías cuyo campo o parte de él se halla a la **izquierda** de la línea (las partes sombreadas en el dibujo IV). A la izquierda de la línea que trazamos está, todo el campo de la tecnología C, una parte del campo de la tecnología B y una parte del campo de la tecnología D. Por lo tanto, la compañía puede utilizar las tecnologías B, C y D para la fabricación de motores con rendimiento inferior a 550 HP, y la respuesta correcta es la (4).



COMPRESIÓN DE TABLAS

Estudien atentamente la siguiente tabla y respondan a las preguntas que aparecen a continuación.

EXPLICACIÓN DE LA TABLA:

En la tabla están los datos de 10 compañías que operan en rubros diferentes. Las compañías están indicadas con las letras A a J.

Para cada compañía se indica: el rubro del que se ocupa, datos acerca del volumen de ventas, las ganancias, el valor de su patrimonio y el número de sus trabajadores.

Por ejemplo: La compañía E trabaja en el rubro de electrónica, cuenta con 400,000 trabajadores y su patrimonio es de 90 millones de dólares. Las ventas de la compañía E alcanzaron los 70 mil millones de dólares durante este año (que son un 9% mayores que las ventas del año pasado) y las ganancias fueron de 6,000 millones de dólares (que son un 60% mayores que las ganancias del año pasado).

Un ejemplo para el cálculo del porcentaje de la variación: Si las ventas de cierta compañía fueron de 40 mil millones de dólares durante el año pasado, y este año aumentaron a 50 mil millones de dólares, entonces el porcentaje de la variación con respecto al año anterior es de un 25% $\left(\frac{50-40}{40} \cdot 100\right)$.

Nombre de la compañía	Rubro	Ventas		Ganancias		Patrimonio (en millones de dólares)	Cantidad de trabajadores (en miles)
		Ventas (en miles de millones de dólares)	Porcentaje de variación respecto del año anterior	Ganancias (en millones de dólares)	Porcentaje de variación respecto del año anterior		
A	automotor	125	-1.5 %	-2,000	-150 %	180	750
B	petróleo	110	25 %	6,500	0 %	100	150
C	petróleo	105	22 %	5,000	40 %	390	100
D	automotor	100	1.5 %	900	-80 %	180	350
E	electrónica	70	9 %	6,000	60 %	90	400
F	automotor	65	7 %	3,000	15 %	55	100
G	metalurgia	60	25 %	1,000	-20 %	No hay datos	400
H	petróleo	60	20 %	3,000	-15 %	60	120
I	petróleo	55	15 %	2,000	7 %	40	70
J	electrónica	50	6 %	4,500	10 %	150	300

Presta atención: al responder a cada pregunta no debes tomar en cuenta los datos que aparecen en otras preguntas.

LAS PREGUNTAS Y SUS SOLUCIONES:

1. ¿Cuál de las compañías pertenecientes al rubro automotor es la que tiene **menor** patrimonio?

- (1) A
- (2) D
- (3) F
- (4) A y también D

En la segunda columna desde la izquierda se encuentran los rubros a los que se dedica cada una de las compañías. Se puede comprobar que las compañías A, D y F se ocupan del rubro automotor. Comparamos ahora los valores de sus patrimonios (en la segunda columna desde la derecha): la compañía A tiene un patrimonio de 180 millones de dólares y ése es también el valor del patrimonio de la compañía D. La compañía F tiene un patrimonio de 55 millones de dólares y, por lo tanto, el patrimonio de la compañía F es el menor en el rubro automotor. La respuesta correcta es la (3).

2. En el supuesto de que las ganancias se repartan en partes iguales entre todos los trabajadores de la compañía, ¿en cuál de las siguientes compañías la ganancia **por cada** trabajador es máxima?

- (1) H
- (2) B
- (3) C
- (4) F

La ganancia por cada trabajador es un dato que no está indicado en la tabla expresamente pero se puede calcular a partir de los datos que aparecen en ella. Se da en la tabla la ganancia de cada compañía, y también el número de sus trabajadores. La ganancia por cada trabajador de una determinada compañía puede entonces determinarse dividiendo la ganancia total de esa compañía por el número de sus trabajadores.

En todas las compañías la ganancia total está dada en millones de dólares y el número de trabajadores está dado en miles. Por lo tanto, para comparar entre las compañías es posible referirse sólo a los números que aparecen en la tabla y presentar la ganancia por trabajador, del siguiente modo:

F	C	B	H
$\frac{3,000}{100}$	$\frac{5,000}{100}$	$\frac{6,500}{150}$	$\frac{3,000}{120}$

Por supuesto, es posible calcular la ganancia por cada trabajador y encontrar en qué compañía se obtiene el valor mayor, pero es posible comparar las expresiones sin calcularlas:

Las compañías F y H tienen la misma ganancia (3,000), pero dicha ganancia se divide entre un número menor de trabajadores en la compañía F (pues $100 < 120$), y, por lo tanto, la ganancia por trabajador en la compañía F es mayor.

El número de trabajadores en las compañías F y C es el mismo (100), pero en la compañía C la ganancia general es mayor ($3,000 < 5,000$), y por lo tanto, la ganancia por trabajador en la compañía C es mayor.

En las compañías B y C tanto las ganancias generales como el número de trabajadores difieren. En la compañía B el número de trabajadores es 1,5 mayor que en la compañía C (150 contra 100). Si también las ganancias generales de B fuesen de 1,5 veces las de C, es decir, si las ganancias de B fuesen $5000 \cdot 1.5 = 7500$ entonces las ganancias por trabajador serían iguales en las dos compañías. Pero las ganancias generales de B son menores que eso ($6500 < 7500$), por lo tanto, la ganancia por trabajador en B son menores que en la compañía C.

Por lo tanto, la ganancia por trabajador en la compañía C es la mayor y la respuesta correcta es la (3).

Se puede, por supuesto, calcular la ganancia por trabajador en las compañías B y C:

La ganancia por trabajador en la compañía C es de 50, $\left(\frac{5,000}{100} = 50\right)$, y la ganancia por trabajador en la compañía B es menor que 50, $\left(\frac{6,500}{150} < 50\right)$ y por lo tanto, la ganancia por trabajador en la compañía C es mayor.

3. ¿Cuál fue el volumen de ventas de la compañía G el año pasado (en miles de millones de dólares)?

- (1) 48
- (2) 50
- (3) 64
- (4) 76

El volumen de ventas del año pasado no está incluido en la tabla, pero se lo puede calcular por medio del volumen de ventas del año en curso y del porcentaje de variación respecto del año anterior. En la tabla se puede ver que la compañía G vendió este año por la suma de 60 mil millones de dólares y que sus ventas aumentaron en un 25% respecto del año anterior. Es decir, que el volumen de ventas del año anterior es tal que si le agregamos un 25% obtenemos los 60 mil millones. Llamaremos x al volumen de ventas del año anterior y expresaremos esto por medio de una ecuación del siguiente modo: $x + \frac{25}{100} \cdot x = 60$. Simplificando la expresión: $\frac{125}{100} \cdot x = 60$, y despejando ahora x :

$$x = 60 \cdot \frac{100}{125} . \text{ Dividiendo el numerador y el denominador de la fracción por 25: } x = 60 \cdot \frac{4}{5} = 48.$$

O sea, el volumen de ventas del año anterior fue de 48 mil millones de dólares, y la respuesta correcta es la (1).

4. Definiremos el volumen de gastos de una compañía en un año determinado del siguiente modo:

$$\left(\begin{array}{c} \text{Volumen de gastos en} \\ \text{un año determinado} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} \text{Volumen de ventas} \\ \text{en ese año} \end{array} \right) - \left(\begin{array}{c} \text{Volumen de ganancias} \\ \text{en ese año} \end{array} \right)$$

¿En qué rubro se encuentra la compañía que tuvo el mayor volumen de gastos durante este año?

- (1) Automotor
- (2) Petróleo
- (3) Electrónica
- (4) Metalurgia

Para calcular el volumen de gastos de una compañía este año, hay que restar el volumen de ganancias del volumen de ventas. En la tabla el volumen de ventas está dado en miles de millones de dólares, mientras que el volumen de ganancias está dado en millones de dólares. Para poder restar uno de otro hay que convertirlos a las mismas unidades. Si multiplicamos el volumen de ventas indicado en la tabla por 1,000, obtendremos el volumen de ventas en millones de dólares.

Así, por ejemplo, el volumen de ventas de la compañía C es de 105,000 millones de dólares. El volumen de las ganancias de dicha compañía es 5,000 millones de dólares, y por lo tanto, el volumen de gastos es de 100,000 millones de dólares. Se puede calcular de este modo el volumen de gastos de todas las compañías que aparecen en la tabla, y encontrar la compañía con mayor volumen de gastos.

Pero podemos ahorrarnos dicho cálculo: A partir de la fórmula que define el volumen de gastos se infiere que a medida que el volumen de ventas crece, o a medida que volumen de ganancias disminuye, el volumen de gastos es mayor. Por lo tanto, es conveniente estudiar primero las compañías con los volúmenes de ventas mayores o con volúmenes de ganancias menores. Del análisis de la tabla se puede ver que la compañía A es tanto la compañía con volumen de ventas mayor, como la compañía con volumen de ganancias menor (es la única cuyo volumen de ganancia es negativo, es decir que en realidad ha tenido pérdidas), y por lo tanto, es con certeza la que ha tenido mayores gastos. El rubro al que pertenece la compañía A es el rubro automotor y por lo tanto, la respuesta correcta es la (1).