КОЛИЧЕСТВЕННОЕ МЫШЛЕНИЕ

Данная область предназначена для проверки вашей способности использовать числа и математические понятия для решения задач количественного характера, а также способности анализировать данные, представленные в различных формах, например, в виде таблиц и диаграмм. Математические знания, необходимые для ответа на вопросы из области количественного мышления, носят базисный характер (соответствуют материалу, изучаемому до 9-10 классов большинства израильских школ).

Все вопросы в данной области являются вопросами множественного выбора (т. е. вопрос, за которым следуют четыре возможных варианта ответа, лишь один из которых является верным).

Вопросы в разделе количественного мышления относятся к двум категориям: вопросы и задачи и выводы из диаграммы или таблицы.

Вопросы и задачи касаются различных тем из алгебры и геометрии. Некоторые из них сформулированы при помощи математических терминов, а другие сформулированы словесно, и следует вначале переформулировать их в математических терминах.

Вопросы, в которых требуется сделать выводы из диаграммы или таблицы, касаются информации, содержащейся в диаграмме или таблице. На диаграмме данные представлены графически, например, в виде кривых, столбиков, точек и т. д. и имеют форму вопросов множественного выбора. В таблице данные распределены по строкам и столбцам.

Вопросы каждой категории обычно приводятся в порядке возрастания трудности. Первые вопросы являются очень легкими, и для их решения требуется относительно небольшое количество времени. Постепенно степень трудности вопросов возрастает, и на их решение приходится затрачивать больше времени.

Чертежи, прилагаемые к некоторым вопросам, не обязательно начерчены в соответствующих масштабах. Поэтому не следует делать выводы о длине отрезка, величине угла и т. д. лишь на основании чертежей. Вместе с тем, если линия на чертеже представляется прямой, то можно предположить, что она действительно является прямой.

В начале каждого раздела приведен "Лист с формулами": страница, содержащая указания, примечания и различные формулы. Можно воспользоваться им во время экзамена. Лист с формулами приведен также в настоящей брошюре (на стр. 44) и в разделах количественного мышления образца экзамена. Желательно ознакомиться с ним и научиться ориентироваться в нем перед экзаменом.

На страницах 45-69 повторяются основные математические понятия, в значительной мере отражающие материал, на котором основаны вопросы разделов количественного мышления. Вместе с тем, сам экзамен может содержать вопросы, для решения которых потребуется знание дополнительных математических понятий и теорем, не приведенных на этих страницах.

На страницах 73-90 приведены образцы вопросов различных категорий, за каждым из которых следует подробное объяснение способа его решения.

Лист с формулами

В этом разделе 20 вопросов.
Время на решение - 20 минут.

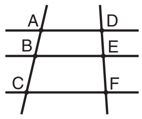
Этот раздел включает вопросы и задачи, для решения которых требуется применение количественного мышления. К каждому вопросу предлагаются четыре варианта ответа. Следует выбрать правильный вариант ответа и отметить его номер в соответствующем месте на листе ответов.

Общие замечания

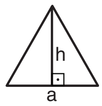
* Чертежи, прилагаемые к некоторым вопросам, предназначены для того, чтобы помочь в их решении, но они не обязательно начерчены в соответствующих масштабах. Не следует делать выводы о длине отрезка, величине угла и т. д. лишь на основании чертежей.
* Если линия, изображенная на рисунке, представляется прямой, то можно предположить, что она действительно является прямой.
* Если в вопросе в качестве одного из данных приведен геометрический термин (ребро, радиус, площадь, объем и др.), то подразумевается, что его значение больше ноля (в противном случае будут даны другие указания).
* Если в вопросе указан $\sqrt{a}$ $(a > 0)$, то имеется в виду положительный корень a.
* 0 не является ни положительным числом, ни отрицательным числом.
* 0 является четным числом.
* 1 не является простым числом.

Формулы

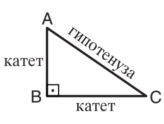
1. **Проценты:** $a\%$ от x - это $\frac{a}{100} \cdot x$
2. **Степени:** для любого числа a, не равного 0, и любых целых n и m -
   а. $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$
   б. $a^{m+n} = a^m \cdot a^n$
   в. $a^{\frac{n}{m}} = (\sqrt[m]{a})^n$ $(a > 0,\ m > 0)$
   г. $a^{n \cdot m} = (a^n)^m$
3. **Формулы сокращенного умножения:**
   $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$
   $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$
4. **Задачи на пройденный путь:** скорость = $\frac{\text{расстояние}}{\text{время}}$
5. **Задачи на мощность:** мощность = $\frac{\text{работа}}{\text{время}}$
6. **Факториал:** $n! = n(n-1)(n-2) \cdot ... \cdot 2 \cdot 1$
7. **Пропорция:** Если $AD \parallel BE \parallel CF$, то $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF}$, а также $\frac{AB}{AC} = \frac{DE}{DF}$



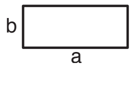
8. **Треугольник:**
   а. **Площадь** треугольника, длина основания которого a, и длина высоты к данному основанию h, равна $\frac{a \cdot h}{2}$



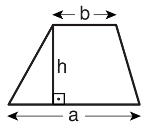
   б. **Теорема Пифагора:** в прямоугольном треугольнике (треугольник ABC на чертеже) всегда соблюдается следующее правило: $AC^2 = AB^2 + BC^2$



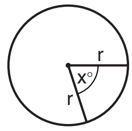
   в. В прямоугольном треугольнике, углы которого равны 30°, 60° и 90°, длина катета, лежащего против угла в 30°, равна половине длины гипотенузы.
9. **Площадь прямоугольника** длиной a и шириной b равна $a \cdot b$



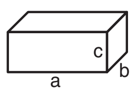
10. **Площадь трапеции**, длина одного основания которой a, а длина другого основания b и длина высоты h, равна $\frac{(a+b) \cdot h}{2}$



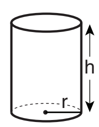
11. **Внутренние углы многоугольника (n - число сторон многоугольника):**
    а. Сумма внутренних углов многоугольника равна $(180n - 360)$ градусов.
    б. В правильном многоугольнике **величина каждого внутреннего угла** равна $\left(180 - \frac{360}{n}\right) = \left(\frac{180n - 360}{n}\right)$ градусов.
12. **Круг, окружность:**
    а. **Площадь** круга радиусом r равна πr^2 $(\pi = 3.14...)$
    б. **Длина** окружности равна $2\pi r$
    в. **Площадь сектора круга**, образованного центральным углом $x°$, равна $\pi r^2 \cdot \frac{x}{360}$



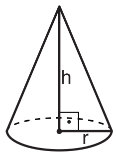
13. **Прямоугольный параллелепипед, куб:**
    а. **Объем** прямоугольного параллелепипеда, длина которого a, ширина b и высота c, равен $a \cdot b \cdot c$



    б. **Площадь поверхности** прямоугольного параллелепипеда равна $2ab + 2bc + 2ac$
    в. **В кубе** $a = b = c$
14. **Цилиндр:**
    а. **Площадь боковой поверхности** цилиндра, радиус основания которого равен r, а высота h, равна $2\pi r \cdot h$



    б. **Площадь полной поверхности** цилиндра равна $2\pi r^2 + 2\pi r \cdot h = 2\pi r(r + h)$
    в. **Объем** цилиндра равен $\pi r^2 \cdot h$
15. **Объем конуса**, радиус основания которого r, а высота h, равен $\frac{\pi r^2 \cdot h}{3}$



16. **Объем пирамиды**, площадь основания которой S а высота h, равен $\frac{S \cdot h}{3}$

Основные математические понятия

Знаки

Знак	Значение
$a \parallel b$	Прямые a и b являются параллельными
$a \perp b$	Прямая a перпендикулярна прямой b
$\llcorner$	Угол величиной 90°, прямой угол
$\sphericalangle ABC$	Угол, заключённый между отрезком AB и отрезком BC
$x = y$	x равен y
$x \neq y$	x не равен y
$x < y$	x меньше y
$x \leq y$	x меньше y или равен ему
$a < x , y$	x , также как и y, больше a
$x = \pm a$	x может быть равен или a, или $-a$
$\|x\|$	Абсолютное значение x
$x : y$	Соотношение между x и y

Виды чисел

Целое число: Целым числом называется число, состоящее из целых единиц. Целое число может быть положительным или отрицательным, ноль также является целым числом. Например: ...-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4... Обратите внимание: 0 - это целое число, которое не является ни положительным, ни отрицательным.

Нецелое число: Число, которое невозможно выразить при помощи целых единиц. Например: 1.37 , $2\frac{1}{2}$, $-1\frac{1}{2}$, $\sqrt{2}$

Последовательные числа: Целые числа, следующие друг за другом с разницей в 1. Например, 4 и 5 являются последовательными числами. 2, 3 и 4 являются последовательными числами, как и (-3) и (-2). В целом, если n является целым числом, то n и $(n+1)$ являются последовательными числами. Иногда говорят: $(n+1)$ является последовательным числом n .

Четное число: Целое число, при делении которого на 2 получают целое число (то есть оно делится на 2 без остатка). В целом, если n является целым числом, то $2n$ является четным числом.
Обратите внимание: 0 является четным числом.

Нечетное число: Целое число, при делении которого на 2 получают нецелое число (то есть оно делится на 2 с остатком 1). В общем, если n является целым числом, то $2n+1$ является нечетным числом.

Простое число: Целое и положительное число, которое делится без остатка лишь на два числа: на себя само и на 1. Например, 13 является простым числом, поскольку оно делится без остатка только на 1 и на 13. Обратите внимание: 1 **не является** простым числом.

Противоположные числа: Пара чисел, сумма которых равна нулю.
Например: 4 и (-4) являются противоположными числами.
В общем виде a и $(-a)$ являются противоположными числами $(a + (-a) = 0)$, или, другими словами, $(-a)$ - это число, противоположное a.

Обратные числа: Пара чисел, произведение которых равно 1.
Например, 3 и $\frac{1}{3}$ являются обратными числами, как и $\frac{2}{7}$ и $\frac{7}{2}$.
В целом, для $a, b \neq 0$:
a и $\frac{1}{a}$ являются обратными числами $\left(a \cdot \frac{1}{a} = 1\right)$, или, другими словами, $\frac{1}{a}$ является числом, обратным a.
$\frac{a}{b}$ и $\frac{b}{a}$ являются обратными числами $\left(\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = 1\right)$, или, другими словами, $\frac{b}{a}$ является числом, обратным $\frac{a}{b}$.

Абсолютное значение: Если $x > 0$, то $|x| = x$,
если $x < 0$, то $|x| = -x$,
$|0| = 0$

Арифметические действия с четными и нечетными числами

четное число	+	четное число	=	четное число
нечетное число	+	нечетное число	=	четное число
нечетное число	+	четное число	=	нечетное число
четное число	−	четное число	=	четное число
нечетное число	−	нечетное число	=	четное число
четное число	−	нечетное число	=	нечетное число
нечетное число	−	четное число	=	нечетное число
четное число	×	четное число	=	четное число
нечетное число	×	нечетное число	=	нечетное число
нечетное число	×	четное число	=	четное число

Не существует подобных правил в отношении действия деления. Например, частное деления двух четных чисел может быть нечетным числом $\left(\frac{6}{2} = 3\right)$, четным числом $\left(\frac{4}{2} = 2\right)$ или нецелым числом $\left(\frac{6}{4} = 1\frac{1}{2}\right)$.

Множители (делители) и кратные числа

Множителем (делителем) целого положительного числа является любое целое положительное число, на которое оно делится без остатка. Например, числа 24,12, 8, 6, 4, 3, 2 и 1 являются множителями (делителями) числа 24.

Общим множителем чисел x и y называется число, которое является как множителем x, так и множителем y. Например, 6 является общим множителем 24 и 30.

Простым множителем числа является множитель, который также является простым числом. Например, 2 и 3 являются простыми множителями числа 24.
Любое целое положительное число, большее, чем 1, можно представить в виде произведения простых множителей. Например: $24 = 3 \cdot 2^3 = 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$.

Кратным целого числа x является любое целое число, которое делится на x без остатка. Например, 16, 32 и 88 являются кратными 8.

Когда в вопросе используется слово "делится", то подразумевается "делится без остатка".

Арифметические действия с дробями

Сокращение

Когда у числителя и знаменателя дроби есть общий множитель, то можно разделить каждый из них на этот общий множитель. Будет получена дробь, равная первоначальной дроби, но с меньшими числителем и знаменателем. Например, если разделить числитель и знаменатель $\frac{16}{12}$ на 4, то получим $\frac{4}{3}$ $\left(\frac{16}{12} = \frac{4}{3}\right)$.

Умножение

Для того чтобы умножить одну дробь на другую, следует умножить числитель первой дроби на числитель второй дроби и знаменатель первой дроби на знаменатель второй дроби.

Например: $\frac{2}{3} \cdot \frac{5}{7} = \frac{2 \cdot 5}{3 \cdot 7} = \frac{10}{21}$

Деление

Для того чтобы разделить число на дробь, следует умножить это число на дробь, обратную дроби-делителю.

Например: $\dfrac{\frac{2}{5}}{\frac{3}{8}} = \frac{2}{5} : \frac{3}{8} = \frac{2}{5} \cdot \frac{8}{3} = \frac{2 \cdot 8}{5 \cdot 3} = \frac{16}{15}$

Для того чтобы умножить или разделить целое число на дробь, можно представить целое число в качестве дроби со знаменателем 1 (например, $2 = \frac{2}{1}$).

Сложение и вычитание

Для сложения и вычитания дробей следует превратить их в дроби с общим знаменателем. **Общим знаменателем** является число, которое можно разделить без остатка на знаменатель каждой из этих дробей. После нахождения числа, которое может быть общим знаменателем, следует перевести каждую из дробей в дробь, чей знаменатель равен данному общему знаменателю. Для этого следует умножить числитель и знаменатель каждой дроби на одно и то же целое число, с тем чтобы в знаменателе обеих дробей получилось число, выбранное в качестве общего знаменателя. Поскольку числитель и знаменатель дроби были умножены на одно и то же число, что равносильно умножению на 1, ее значение не изменилось. После приведения дробей к общему знаменателю следует сложить полученные числители или вычесть один числитель из другого и по возможности сократить полученные дроби.

Пример

$\frac{3}{4}+\frac{1}{6}+\frac{5}{8}=?$

Возможным общим знаменателем этих дробей является 24, так как 24 делится без остатка на знаменатели каждой из них: $\frac{24}{4}=6$, $\frac{24}{6}=4$, $\frac{24}{8}=3$

Приведем каждую их этих дробей к данному общему знаменателю:

$\frac{3}{4}=\frac{18}{24}$, $\frac{1}{6}=\frac{4}{24}$, $\frac{5}{8}=\frac{15}{24}$

Получим: $\frac{3}{4}+\frac{1}{6}+\frac{5}{8}=\frac{18}{24}+\frac{4}{24}+\frac{15}{24}=\frac{18+4+15}{24}=\frac{37}{24}$

Проценты

Проценты представляют собой способ представления сотых долей целого: a% от x равняется a сотых x, то есть $\frac{a}{100}\cdot x$. В задачах, содержащих проценты, вам следует перевести их в сотые и решить их подобно задачам с обычными дробями.

Пример

Чему равны 60 процентов от 80?

Вместо 60 процентов напишем 60 сотых и решим задачу при помощи обычного умножения дробей: $\frac{60}{100}\cdot 80=\frac{60\cdot 80}{100}=6\cdot 8=48$.

То есть 60% от 80 равны 48.

В вопросах, в которых требуется найти изменение в процентах, речь идет о проценте от начального значения (в противном случае будут даны другие указания).

Пример

Цена предмета составляла 80 шекелей. Ее увеличили на 25%. Какова его новая цена?
Поскольку к старой цене добавили 25%, то новая цена составляет 125% от старой цены (100% + 25%). Поэтому вам следует найти, чему равны 125% от 80.

Вместо процентов подставим сотые и решим задачу: $\frac{125}{100}\cdot 80=100$.

То есть, новая цена предмета составляет 100 шекелей.

Пример

Цена предмета уменьшилась с 15 шекелей до 12 шекелей. На сколько процентов уменьшилась его цена?

В этом примере дано изменение в цене некоторого предмета. Следует вычислить процент, который составило это изменение. Изменение в цене предмета составило 3 шекеля (из 15 шекелей). Вам необходимо вычислить, сколько процентов от 15 составляет 3.

Сформулируем этот вопрос в виде математического выражения: $\frac{a}{100}\cdot 15=3$. Решим полученное уравнение: $a=\frac{3\cdot 100}{15}=20$.

Итак, цена уменьшилась на 20%.

Отношения

Отношение x к y записывается в следующем виде: $x : y$.

Пример

Отношение количества пар носков у Игоря к количеству его рубашек равно 3 : 2, то есть на каждые 3 пары носков Игоря приходятся 2 рубашки. Другими словами, количество пар носков у Игоря в $\frac{3}{2}$ больше, чем количество его рубашек.

Среднее значение

Средним арифметическим группы чисел называется их сумма, деленная на их количество. Когда в вопросе говорится о "среднем", подразумевается среднее арифметическое.

Например, среднее группы чисел 1, 3, 5, 10 и 21 равно 8, так как $\frac{1+3+5+10+21}{5} = \frac{40}{5} = 8$.

Если дано среднее значение группы чисел, то можно вычислить их сумму, умножив среднее значение на их количество.

Пример

Дима купил 5 предметов, чья средняя цена равна 10 шекелям. Сколько заплатил Дима за все купленные им предметы?

В данной задаче следует найти сумму по среднему значению. Умножим среднее значение на количество предметов и получим $10 \cdot 5 = 50$. Итак, Дима заплатил в общей сложности 50 шекелей за все купленные им предметы.

Взвешенным средним группы чисел называется их среднее значение с учетом относительного веса каждого числа группы.

Пример

Игорь получил оценку 75 за промежуточный экзамен по одному из курсов и оценку 90 за заключительный экзамен. Если вес заключительного экзамена в 2 раза больше, чем вес промежуточного экзамена, то какова будет итоговая оценка Игоря за данный курс?
Группа чисел, из которых складывается итоговая оценка Игоря, состоит из 75 и 90, однако каждое из них имеет различный вес. Оценка 75 обладает весом в 1 единицу, а оценка 90 - весом в 2 единицы. Для вычисления взвешенного среднего следует умножить каждую из оценок на ее вес и разделить полученный результат на сумму весов оценок:
$\frac{1 \cdot 75 + 2 \cdot 90}{1+2} = 85$.
Итак, оценка Игоря за данный курс составит 85. Это вычисление подобно вычислению арифметического среднего трех чисел: 75, 90 и 90.

Степени и корни

Возведение числа в степень n (n - целое и положительное число) означает умножение числа на само себя n раз: $a^n = \underbrace{a \cdot ... \cdot a \cdot a}_{n \text{ раз}}$

Например: $(-3)^3 = (-3)(-3)(-3) = -27$.

a^n называется "степенью числа a", n - "показателем степени", a - "основанием степени". Любое отличное от нуля число, возведенное в степень 0, равно 1, то есть $a^0 = 1$ для каждого $a \neq 0$.

Степень с отрицательным показателем определена в качестве степени, которая получается при возведении числа, обратного ее основанию, в степень, противоположную ее показателю: $a^{-n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n$.

Например: $2^{-3} = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$.

Корень порядка n положительного числа a, обозначаемый $\sqrt[n]{a}$, является положительным числом b, при возведении которого в данную степень n будет получено a:
если $b^n = a$, то $\sqrt[n]{a} = b$.

Например: $\sqrt[4]{81} = 3$, так как $3^4 = 81$

Если порядок корня не указан, то имеется в виду корень порядка 2. Например: $\sqrt{81} = \sqrt[2]{81} = 9$.

Корень порядка 2 также называется квадратным корнем.

Корень может быть представлен в виде степени, показателем которой является дробь. В данном случае эта дробь будет обратной порядку корня: $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$ $(a > 0)$.

Обратите внимание: под $\sqrt{a}$ $(a > 0)$ понимают положительный корень из a .

Основные правила действий со степенями (для любого n и m).

Умножение: для умножения степеней с одинаковым основанием следует сложить их показатели: $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

Деление: для деления степеней с одинаковым основанием следует вычесть показатель степени знаменателя из показателя степени числителя: $\frac{a^m}{a^n} = a^{(m-n)}$.

Обратите внимание: **если основания степеней отличны друг от друга, нельзя произвести сложение или вычитание показателей**.

Возведение в степень: для возведения степени в степень следует умножить показатели друг на друга: $(a^m)^n = a^{(m \cdot n)}$

Возведение в степень произведения или частного: $(a \cdot b)^m = a^m \cdot b^m$, $\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$

Поскольку корни могут быть представлены в виде степеней, то к ним также могут быть применены правила математических действий со степенями.

Например, для того чтобы вычислить произведение $\sqrt[m]{a} \cdot \sqrt[n]{a}$ $(a > 0)$, представим корни в виде степеней: $\sqrt[m]{a} \cdot \sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{m}} \cdot a^{\frac{1}{n}}$, а затем перемножим их по правилам умножения степеней (т. е. сложим их показатели): $a^{\frac{1}{m}} \cdot a^{\frac{1}{n}} = a^{\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{n}\right)}$.

Степенные неравенства:

Если	$a > b > 0$	и	$n > 0$,	то	$b^n < a^n$
Если	$a > b > 0$	и	$n < 0$,	то	$a^n < b^n$
Если	$a > 1$	и	$m < n$,	то	$a^m < a^n$
Если	$1 > a > 0$	и	$m < n$,	то	$a^n < a^m$

Формулы сокращенного умножения

Для того, чтобы умножить друг на друга два заключенных в скобки выражения, каждое из которых является суммой слагаемых, следует умножить каждый член первого выражения на каждый член второго выражения, а затем сложить полученные произведения.
Например: $(a + b)\cdot(c + d) = ac + ad + bc + bd$

В соответствии с данной общей формулой можно вычислить произведение любых двух выражений, однако в целях экономии времени вы можете запомнить наизусть несколько распространенных формул:

$(a + b)^2 = (a + b) \cdot (a + b) = a^2 + 2ab + b^2$

$(a - b)^2 = (a - b) \cdot (a - b) = a^2 - 2ab + b^2$

$(a - b) \cdot (a + b) = a^2 - b^2$

Комбинаторика

Многоэтапный опыт

Пример

Бросим игральный кубик, а затем бросим монету. Каково число возможных исходов данного опыта?
В данном опыте два этапа: этап бросания кубика и этап бросания монеты.
Число возможных исходов при бросании кубика равно 6, а число возможных исходов при бросании монеты равно 2.
Число возможных исходов всего опыта будет равно $6 \cdot 2 = 12$.
Одним из 12 возможных исходов будет выпадение "3" на кубике и „решки” на монете.
По сути, не имеет значения, бросают вначале кубик, а затем монету, вначале монету, а затем кубик, или выполняют эти действия одновременно. В любом случае существуют 12 возможных исходов.

Далее мы поговорим о многоэтапном опыте, в котором дана группа из n объектов, из которой случайным образом следует выбрать объект r раз. Каждый выбор объекта из этой группы является этапом опыта. В общей сложности в опыте есть r этапов. Число возможных исходов каждого из r этапов опыта зависит от способа выбора объектов. Число возможных исходов опыта в целом равно произведению числа возможных исходов, которые получают на r его этапах. Каждый возможный исход опыта называют **размещением**.

Размещения с последующим возвратом
Способ выбора объектов: выбранный объект **возвращают** в группу немедленно после его выбора, и **порядок** выбора объектов **имеет значение**.
Число возможных исходов: на каждом этапе число возможных исходов равно n, и поэтому число возможных исходов на всех r этапах (то есть, число возможных исходов опыта в целом) равно $n \cdot n \cdot ... \cdot n = n^r$.
Обратите внимание: при данном способе выбора объект может быть выбран более одного раза.
Количество размещений с последующим возвратом равно n^r.

Пример

В коробке находятся 9 шаров, пронумерованных от 1 до 9. Случайным образом извлекают из коробки шар, возвращают его в коробку, а затем повторяют эти действия еще два раза. Записывают номера извлеченных шаров, согласно порядку извлечения, таким образом что получают трехзначное число. Сколько различных трехзначных чисел может быть получено таким образом?
В данном опыте порядок имеет значение. Например, если номера извлеченных шаров были 3, 8 и 3 (в этом порядке), то будет получено число 383. Если же порядок их извлечения был 3, 3 и 8, то было получено другое число, а именно 338.
В данном опыте было 3 этапа, и возможное число исходов на каждом этапе равно 9. Таким образом, число возможных исходов опыта в целом равно $9^3 = 729$. То есть, может быть получено 729 различных трехзначных чисел.

Размещения без последующего возврата
Способ выбора объектов: выбранный объект **не возвращают** в группу после выбора, и **порядок** выбора объектов **имеет значение**.
Число возможных исходов: число возможных исходов на первом этапе равно n, число возможных исходов на втором этапе равно $n-1$ (поскольку выбранный на первом этапе объект не был возвращен в группу, и осталось лишь $n-1$ объектов, из которых можно выбирать) и т. д. вплоть до последнего этапа - этапа номер r, на котором число возможных исходов $n-r+1$. Таким образом, число возможных исходов опыта в целом равно $n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-r+1)$.
Количество размещений без последующего возврата равно $n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-r+1)$.

Пример

В коробке находятся 9 шаров, пронумерованных от 1 до 9. Случайным образом извлекают из коробки 3 шара один за другим, не возвращая извлеченные шары в коробку. Записывают номера извлеченных шаров согласно порядку извлечения, таким образом что получают трехзначное число. Сколько различных трехзначных чисел может быть получено таким образом?
В данном опыте порядок извлечения шаров также имеет значение, однако в отличие от предыдущего примера, в этом опыте извлеченные шары не возвращают в коробку. Поэтому число возможных исходов на первом этапе опыта равно 9, на втором этапе опыта - 8, а на третьем этапе - 7. Общее число возможных исходов опыта в целом равно $9 \cdot 8 \cdot 7 = 504$. То есть, может быть получено 504 различных трехзначных числа.

Перестановки
При размещениях без последующего возврата всех n объектов в группе (то есть, если $r = n$) каждый возможный исход представляет собой внутреннюю перестановку объектов в группе (какой объект выбран первым, какой объект выбран вторым и т. д.). Возникает вопрос: каково количество возможных перестановок?
Подставим $r = n$ в формулу для вычисления количества размещений без последующего возврата и получим $n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1$. Данное число обозначают $n!$ (читается „n факториал”).
Количество возможных перестановок n предметов равно $n!$

Пример

Бабушка, мать и дочь хотят выстроиться в ряд, чтобы сфотографироваться. Сколькими различными способами они смогут сделать это?
Назовем стоящую справа женщину первой, стоящую посередине - второй, а стоящую слева - третьей. Вопрос заключается в том, каково число возможных перестановок бабушки, матери и дочери. Бабушка, мать и дочь представляют собой группу из 3 объектов, и поэтому число их возможных перестановок равно $3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$. Перечислим возможные перестановки: бабушка - мать - дочь, бабушка - дочь - мать, мать - бабушка - дочь, мать - дочь -бабушка, дочь - бабушка - мать, дочь - мать - бабушка.

Сочетания
Способ выбора объектов: выбранный объект **не возвращают** в группу после выбора, и **порядок выбора объектов не имеет значения**. Если порядок выбора объектов не имеет значения, то все размещения r объектов (которые отличаются только порядком выбора объектов в каждом размещении) будут иметь один и тот же исход. Количество таких размещений на деле является количеством перестановок r объектов, то есть $r!$.
Для вычисления числа возможных исходов сочетаний вычисляют число возможных исходов для случая, в котором порядок выбора объектов имеет значение, и делят полученный результат на количество перестановок r объектов.

$$\textbf{Число сочетаний} = \frac{\textbf{число размещений без возврата}}{\textbf{число перестановок}} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-r+1)}{r!}$$

Пример

В коробке находятся 9 шаров, пронумерованных от 1 до 9. Случайным образом извлекают из коробки 3 шара один за другим, не возвращая извлеченные шары в коробку, а затем кладут извлеченные шары в шляпу. Сколько различных вариантов состава шаров в шляпе существует?
В данном вопросе имеет значение состав шаров в шляпе, а не порядок их извлечения из коробки. Например, если шары были извлечены в порядке 5, 1 и 4, то состав шаров в шляпе будет 1, 4 и 5. Точно таким же будет состав шаров в шляпе, если их извлекут в порядке 4, 5 и 1 или в любом другом из 3! возможных порядков: 1-4-5, 1-5-4, 4-1-5, 4-5-1, 5-1-4 и 5-4-1. По сути, тот факт, что шары извлекают из коробки один за другим, не имеет никакого значения: можно было бы извлечь их вместе, и это никак не повлияло бы на результат.
Таким образом, число возможных составов шаров равно $\frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{3!}$, то есть существует 84 различных варианта состава шаров в шляпе.

Теория вероятностей

Теория вероятностей предлагает математическую модель описания явлений, наступление которых не является обязательным, или опытов, исходы которых неизвестны заранее. Каждый из возможных результатов (исходов) опыта принято называть „простое событие”. Группу исходов называют „событие” (в целях упрощения в дальнейшем мы будем использовать термин „событие” также и для обозначения „простого события”). Каждому событию присваивают число от 0 до 1, которое выражает вероятность (степень возможности, шанс) его наступления. Чем больше вероятность, тем выше шансы на то, что данное событие произойдет. Если наступление того или иного события обязательно, то вероятность его наступления равна 1. Если событие не может произойти ни в каком случае, то вероятность его наступления равна 0.
Сумма вероятностей всех простых событий опыта равна 1.

Когда у каждого из n возможных исходов опыта есть одинаковая вероятность наступления, исходы принято называть равновероятными. В этом случае вероятность каждого исхода равна $\frac{1}{n}$.

Пример

Опыт: бросание монеты.
Возможные исходы: две стороны монеты. Их обозначают 1 или 0 („орел” или „решка”). Если речь идет о **стандартной монете**, то оба исхода равновероятны, то есть вероятность выпадения "1" равна вероятности выпадения "0". Отсюда вероятность каждого из возможных исходов равна $\frac{1}{2}$.

Пример

Опыт: бросание игрального кубика.

Возможные исходы: выпадение цифр 1, 2, 3, 4, 5 и 6, указанных на гранях кубика.

Если речь идет о **стандартном кубике**, то вероятность каждого из возможных исходов равна $\frac{1}{6}$.

Когда все возможные исходы опыта являются равновероятными,

вероятность наступления события равна: $\dfrac{\textbf{число исходов данного события}}{\textbf{сумма возможных исходов опыта}}$

Пример

Опыт: бросание игрального кубика.

Событие: выпадение цифр, меньших 4.

Возможные исходы данного события: выпадение цифр 1, 2 и 3.

Вероятность данного события: $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

Пример

Опыт: извлечение шара из сосуда, в котором имеется 5 белых шаров и 5 черных шаров.
Событие: извлечение черного шара.

Вероятность данного события: $\frac{\text{количество черных шаров}}{\text{общее количество шаров в сосуде}} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$.

Вероятность наступления двух событий

Когда два события происходят одновременно или одно за другим, возможны два положения:

А. **Независимые друг от друга события**, то есть вероятность наступления одного события не зависит от наступления другого события.
Б. **Зависимые друг от друга события**, то есть вероятность наступления определенного события зависит от наступления другого события. Другими словами, вероятность наступления определенного события после (или при условии) наступления другого события отличается от вероятности наступления данного события в отсутствие этого условия.

Пример

В сосуде есть 10 шаров: 5 белых и 5 черных. Два шара извлекают из сосуда один за другим.
Известно, что первый из извлеченных шаров был черным.
Какова вероятность того, что второй извлеченный шар также был черным?

Возможны два положения:

Положение А:

первый шар возвращают в сосуд.
Поскольку мы вернули шар в сосуд, количество шаров в сосуде не изменилось и, в частности, не изменилось количество черных шаров в сосуде.

Вероятность извлечения второго черного шара равна $\frac{5}{10} = \frac{1}{2}$, и она равна вероятности извлечения первого черного шара.
Отсюда следует, что тот факт, что данный шар был извлечен вторым, не имеет значения.
Другими словами, события „Извлечение первого черного шара” и „Извлечение второго черного шара” являются независимыми друг от друга событиями.

Положение Б:

первый шар не возвращают в сосуд.
После того как мы извлекли черный шар из сосуда, в нем осталось в общей сложности 9 шаров, 4 из которых являются черными.
Таким образом, вероятность извлечения второго черного шара равна $\frac{4}{9}$.
Эта вероятность отличается от вероятности извлечения первого черного шара.
Другими словами, события „Извлечение первого черного шара” и „Извлечение второго черного шара” являются зависимыми друг от друга событиями.

Вероятность наступления двух независимых друг от друга событий (параллельно или одно за другим) равно произведению вероятностей наступления каждого из этих событий в отдельности.

Пример

Опыт: бросание двух стандартных игральных кубиков: красного и желтого.
Обозначим событие „Выпадение числа, меньшего 3, на красном кубике" через А.
Вероятность наступления события А равна $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.
Обозначим событие „Выпадение четного числа на желтом кубике" через В. Вероятность наступления события В равна $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.
Поскольку исход бросания одного кубика не влияет на вероятность исхода при бросании другого кубика, событие А и событие В являются независимыми.

Отсюда, вероятность наступления события А и события В (вместе) равно
$\left(\begin{matrix}\text{вероятность} \\ \text{события A}\end{matrix} \times \begin{matrix}\text{вероятность} \\ \text{события B}\end{matrix}\right)$, другими словами $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$.

Дадим определение двум зависимым друг от друга событиям А и В (в каком-либо опыте):
вероятность наступления события В при условии, что произошло событие А,

равно: $\dfrac{\textbf{число общих исходов событий B и A}}{\textbf{число исходов события A}}$

Пример

Опыт: бросание игрального кубика.
Какова вероятность выпадения цифры, меньшей 4, если известно, что выпала четная цифра?
Обозначим событие „Выпадение четной цифры" через А,
а событие „Выпадение цифры, меньшей 4" через В.
Переформулируем вопрос в терминах событий: какова вероятность наступления В, если известно (при условии), что наступило событие А?
Существуют три исхода события А: 2, 4 и 6.
Существуют три исхода события В: 1, 2 и 3.
Однако, если известно, что наступило событие А, то у события В есть только один возможный исход: 2, или, другими словами, исход "2" является единственным общим исходом для А и В .
Таким образом, вероятность наступления В в том случае, если известно, что событие А наступило, равна $\frac{1}{3}$.
Эта вероятность отличается от вероятности наступления В (независимого события), которая равна $\frac{1}{2}$.

Путь, скорость и время

Под скоростью тела понимают расстояние, которое тело проходит за единицу времени. Формулой, выражающей связь между скоростью тела, пройденным им расстоянием и временем, которое потребовалось ему для прохождения этого расстояния, является $v = \frac{s}{t}$,

где: v = скорость
s = расстояние
t = время.

Из данной формулы можно вывести все возможные формулы взаимосвязи между расстоянием, скоростью и временем: $t = \frac{s}{v}$, $s = v \cdot t$.

Пример

Поезд проехал 240 км со скоростью 80 км/ч. Сколько времени длилась поездка?
Даны v (80 км/ч) и s (240 км). Вам следует вычислить t.
Поскольку скорость дана в километрах в час, время поездки следует вычислить в часах.

Подставим данные в формулу $t = \frac{s}{v}$: $t = \frac{240}{80} = 3$.

То есть, поездка длилась 3 часа.

Единицы измерения двух величин определяют единицы измерения третьей величины.
Например, если расстояние указано в километрах (км), а время в часах, то скорость будет указана в километрах в час (км/ч).
Если расстояние указано в метрах, а время в секундах, то скорость будет указана в метрах в секунду.
Можно перевести метры в километры, а секунды в часы, и наоборот.

В каждом километре содержится 1000 метров (1 метр = $\frac{1}{1000}$ км).

В каждом часе содержится 3600 секунд, то есть 60 минут (1 секунда = $\frac{1}{3600}$ часа).

Скорость 1 км/ч равна скорости $\frac{5}{18}$ метров в секунду ($\frac{1000}{3600} = \frac{5}{18}$) .

Скорость 1 метр в секунду равна скорости 3.6 км/ч $\left(\frac{\frac{1}{1000}}{\frac{1}{3600}} = \frac{3600}{1000} = 3.6 \right)$.

Мощность (производительность), работа, время

Мощность (производительность) - это количество работы в единицу времени. Формулой, выражающей связь между мощностью, количеством работы и временем, потребовавшимся для ее выполнения, является $p = \frac{w}{t}$, где:

p = производительность
w = количество работы
t = время

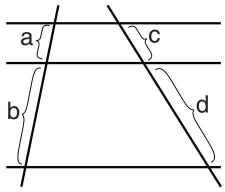
Из данной формулы можно вывести все возможные формулы взаимосвязи между мощностью (производительностью), количеством работы и временем, потребовавшимся для ее выполнения: $t = \frac{w}{p}$; $w = p \cdot t$.

Пример

Каменщик завершает кладку одной кирпичной стены за 3 часа. Сколько часов потребуется двум каменщикам, работающим с той же самой скоростью, чтобы закончить кладку 5 стен?
В данном вопросе дано количество работы, выполняемое одним каменщиком (одна стена), и время его работы (3 часа). Поэтому производительность его работы составляет $\frac{1}{3}$ стены в час. Поскольку в вопросе речь шла о двух каменщиках, то производительность их работы составляет $\frac{1}{3} \cdot 2 = \frac{2}{3}$ стены в час.
В условиях вопроса также дано количество работы, которое требуется выполнить двум каменщикам (5 стен). Отсюда можно вычислить время, которое им потребуется для этого:
$t = \frac{5}{\frac{2}{3}} = 5 \cdot \frac{3}{2} = \frac{15}{2} = 7\frac{1}{2}$. Отсюда: им потребуется $7\frac{1}{2}$ часов.

Параллельные прямые (параллельные линии)

Параллельные линии, которые пересекают две некоторые прямые, делят их на пропорциональные по длине отрезки. Так, на чертеже $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$, $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, а также $\frac{a}{a+b} = \frac{c}{c+d}$.

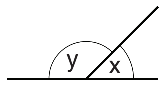


На основании приведенных соотношений можно найти дополнительные соотношения между длинами отрезков.

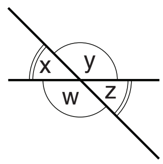
Углы

Прямой угол - это угол, равный 90°.
На чертежах он обозначается как ∟
Острый угол - это угол, меньший 90°.
Тупой угол - это угол, больший 90°.
Развернутый угол - это угол, равный 180°.

Смежные углы
Два угла, образующиеся между прямой и лучом, выходящим из точки, расположенной на этой прямой, называются смежными углами. Вместе они образуют развернутый угол, поэтому сумма их значений равна 180°. Например, x и y на чертеже являются смежными углами, поэтому $x + y = 180°$.

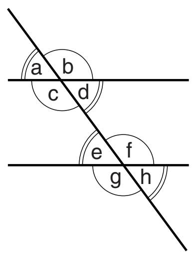


Вертикальные углы
При пересечении двух прямых образуются четыре угла. Каждые два угла, не являющиеся смежными, называются вертикальными углами, и их величины равны.
Например, на данном чертеже x и z (так же, как y и w) являются вертикальными углами. Поэтому $x = z$ и $w = y$.



При пересечении прямой двух параллельных прямых образуются восемь углов. Например, углы a, b, c, d, e, f , g и h на чертеже.

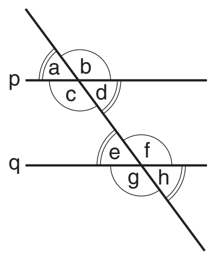
Соответственными углами называются углы, расположенные по одну сторону пересекающей прямой и по одну сторону параллельных прямых. Соответственные углы равны между собой. Поэтому на чертеже: $a = e$, $b = f$, $c = g$ и $d = h$.



Внутренние накрест лежащие углы располагаются на противоположных сторонах параллельных прямых с противоположных сторон пересекающей их прямой. Внутренние накрест лежащие углы также равны между собой. Поэтому, на чертеже: $a = h$, $b = g$, $c = f$ и $d = e$.

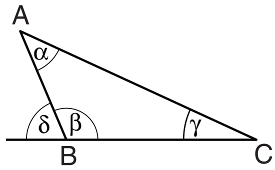
Пример

Дано: прямые p и q являются параллельными.
$d + f = ?$
c и d - смежные углы, поэтому $d + c = 180°$.
c и f - внутренние накрест лежащие углы, поэтому $c = f$.
Поэтому, $d + f = d + c = 180°$, и верным ответом является 180°.



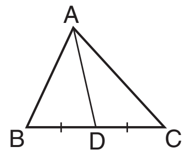
Треугольники

Углы треугольника



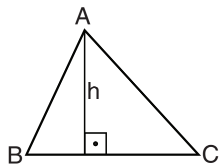
Сумма внутренних углов любого треугольника равна 180°. Например, на чертеже $\alpha + \beta + \gamma = 180°$. Угол, смежный с одним из углов треугольника, называется внешним углом. Его величина равна сумме величин двух других углов треугольника. Например, на чертеже δ является углом, смежным с β, поэтому $\delta = \alpha + \gamma$.

В любом треугольнике против большего угла лежит бóльшая сторона.
Например, на чертеже $\gamma < \alpha < \beta$. Отсюда следует, что длина стороны AC (расположенной против угла β) больше, чем длина стороны BC (расположенной против угла α), а длина стороны BC больше, чем длина стороны AB (расположенной против угла γ).



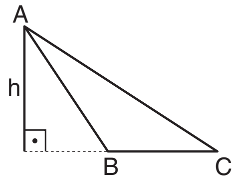
Медиана треугольника - это отрезок, соединяющий вершину треугольника с серединой противоположной ей стороны. Например, в изображенном на чертеже треугольнике AD - это медиана к стороне BC (BD = DC).

Высота треугольника



Высотой, опущенной к стороне треугольника, называется отрезок, исходящий из вершины треугольника к противоположной ей стороне (или ее продолжению) и перпендикулярный к ней. Например, на приведенном ниже чертеже h - высота к стороне BC.

Площадь треугольника

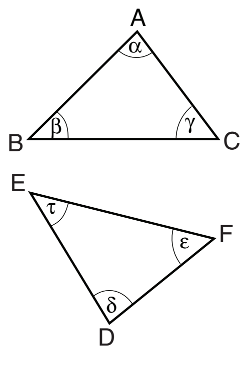


Площадь треугольника равна половине произведения длины одной из сторон треугольника на длину высоты, опущенной к данной стороне. Например, площадь каждого из треугольников ABC, изображенных на чертеже, равна $\frac{BC \cdot h}{2}$.

Неравенство треугольника

Сумма длин двух сторон любого треугольника больше, чем длина его третьей стороны. Например, в треугольниках, изображенных выше на чертежах, (AB + BC) > AC.

Конгруэнтные треугольники



Две геометрические фигуры являются конгруэнтными, если при наложении друг на друга они в точности совпадают. Частным случаем конгруэнтности является **конгруэнтность треугольников**. Соответствующие стороны и углы в конгруэнтных треугольниках равны.

Например, на чертеже если треугольник ABC конгруэнтен треугольнику DEF , то их стороны соответственно равны: AB = DE, BC = EF и AC = DF, а их углы также соответственно равны: $\alpha = \delta$, $\beta = \tau$, $\gamma = \varepsilon$.

Каждая из следующих четырех теорем позволяет нам сделать вывод о конгруэнтности двух треугольников:

(a) Два треугольника являются конгруэнтными, если длины двух сторон одного треугольника соответственно равны длинам двух сторон другого треугольника, и угол между этими

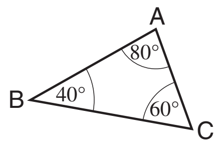
сторонами в одном треугольнике равен соответствующему ему углу в другом треугольнике.
Например, изображенные на чертеже треугольники являются конгруэнтными, если AB = DE, AC = DF и $\alpha = \delta$.

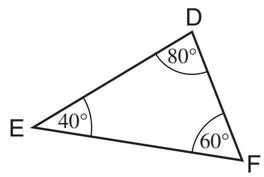
(б) Два треугольника являются конгруэнтными, если два из углов одного треугольника соответственно равны двум из углов другого треугольника, и длина стороны, заключенной между этими углами в одном треугольнике, равна длине соответствующей стороны в другом треугольнике.
Например, изображенные на чертеже треугольники являются конгруэнтными, если $\alpha = \delta$, $\beta = \tau$ и AB = DE.

(в) Два треугольника являются конгруэнтными, если длины трех сторон одного треугольника соответственно равны длинам трех сторон другого треугольника.

(г) Два треугольника являются конгруэнтными, если длины двух сторон одного треугольника соответственно равны длинам двух сторон другого треугольника, и величина угла, лежащего против большей из этих двух сторон в одном треугольнике, равна величине соответствующего угла второго треугольника.
Например, треугольники, изображенные на чертеже конгруэнтны, если: AB > AC и DE > DF, а также AB = DE, AC = DF и $\gamma = \varepsilon$.

Подобные треугольники
Два треугольника называются подобными, если величины трех углов одного треугольника равны величинам трех углов другого треугольника. В подобных треугольниках отношение между длинами любых двух сторон одного треугольника равно отношению между длинами двух соответственных сторон другого треугольника.
Например, треугольники ABC и DEF на чертеже являются подобными, поэтому $\frac{AB}{AC} = \frac{DE}{DF}$.
Отсюда также следует: $\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF} = \frac{BC}{EF}$.

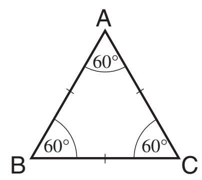




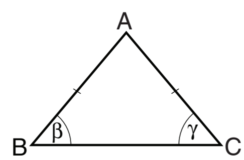
Конгруэнтные треугольники также непременно являются подобными.

Типы треугольников

Равносторонним треугольником называется треугольник, длины всех сторон которого равны. Например, на чертеже: AB = BC = AC. Все углы такого треугольника также равны (60°). Если длина стороны такого треугольника равна a, то его высота равна $a\frac{\sqrt{3}}{2}$, а его площадь равна $a^2\frac{\sqrt{3}}{4}$.



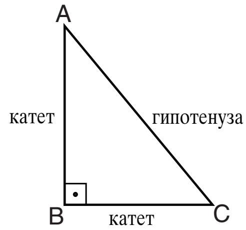
Равнобедренным треугольником называется треугольник, длины двух из сторон которого равны. Например, на чертеже: AB = AC. Третья сторона равнобедренного треугольника называется "основанием". Величины углов, расположенных против равных сторон, также равны по величине. Например, на чертеже: $\beta = \gamma$.



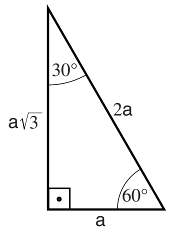
Остроугольным треугольником называется треугольник, все углы которого острые.

Тупоугольным треугольником называется треугольник, один из углов которого - тупой.

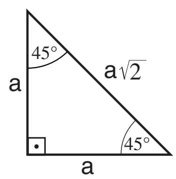
Прямоугольным треугольником называется треугольник, один из углов которого является прямым (90°).
Сторона, расположенная против прямого угла (сторона AC на чертеже), называется **гипотенузой**, а две другие стороны называются **катетами** (AB и BC на чертеже).
Согласно теореме Пифагора, в прямоугольном треугольнике квадрат длины гипотенузы равен сумме квадратов длин катетов (например, на чертеже: $AC^2 = AB^2 + BC^2$).
С помощью этой формулы можно вычислить длину любой стороны прямоугольного треугольника при условии, что даны длины двух других сторон.



В прямоугольном треугольнике, углы которого равны 30°, 60° и 90°, длина катета, лежащего против угла в 30°, равна половине длины гипотенузы. Например, на чертеже длина гипотенузы равна 2a , и поэтому длина катета, лежащего против угла в 30°, равна a. Помимо этого, из теоремы Пифагора следует, что длина катета, лежащего против угла в 60°, равна $a\sqrt{3}$.

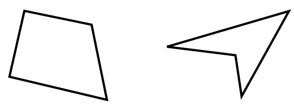


В прямоугольном равнобедренном треугольнике величины углов равны 45°, 45°, 90°, длины обоих катетов равны, а длина гипотенузы в $\sqrt{2}$ больше, чем длина катетов (согласно теореме Пифагора). Например, на чертеже: длина каждого катета равна a и поэтому длина гипотенузы равна $a\sqrt{2}$.



Четырехугольники

Четырехугольником называется любой многоугольник с четырьмя сторонами. Например:

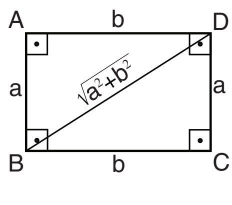


Прямоугольник и квадрат

Прямоугольником называется четырехугольник, все углы которого являются прямыми. Противоположные стороны прямоугольника равны по длине.

Периметр прямоугольника, изображенного на чертеже, равен $2a + 2b = 2(a + b)$.

Длина диагонали прямоугольника, изображенного на чертеже, равна $\sqrt{a^2+b^2}$ (согласно теореме Пифагора).

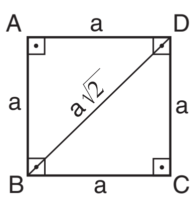


Площадь прямоугольника равна произведению длин двух смежных сторон прямоугольника. Площадь прямоугольника, изображенного на чертеже, равна $a \cdot b$.

Квадратом называется прямоугольник, все стороны которого равны по длине.

Периметр квадрата, изображенного на чертеже, равен 4a.

Длина диагонали квадрата, изображенного на чертеже, равна $\sqrt{a^2+a^2} = a\sqrt{2}$



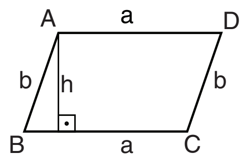
Площадь квадрата равна квадрату длины его стороны. Например, площадь квадрата, изображенного на чертеже, равна a^2.

Параллелограмм и ромб

Параллелограммом называется четырехугольник, противоположные стороны которого попарно параллельны и равны по длине. Например, в параллелограмме, изображенном на чертеже:

$AD \parallel BC$, $AB \parallel DC$

$AD = BC$, $AB = DC$



Диагонали параллелограмма делятся пополам в точке пересечения.

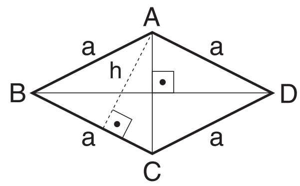
Периметр параллелограмма, изображенного на чертеже, равен $2a + 2b$.

Высотой параллелограмма называется отрезок, соединяющий две его противоположные стороны (или их продолжения) и перпендикулярный к ним.

Площадь параллелограмма равна произведению длины его стороны на длину высоты, опущенной к этой стороне. Например, площадь параллелограмма, изображенного на чертеже, равна $a \cdot h$.

Ромбом называется четырехугольник, все четыре стороны которого равны друг другу по длине. Противоположные стороны ромба являются попарно параллельными, поэтому можно рассматривать его в качестве равностороннего параллелограмма.

Диагонали ромба
Поскольку ромб является видом параллелограмма, то его диагонали также делятся пополам в точке пересечения. Кроме того, диагонали ромба перпендикулярны друг другу.

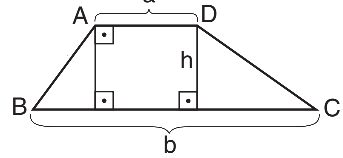


Периметр ромба, изображенного на чертеже, равен $4a$.

Площадь ромба
Поскольку ромб является видом параллелограмма, то его площадь также можно вычислить посредством умножения длины стороны ромба на длину его высоты к данной стороне (например, площадь изображенного на чертеже ромба равна $a \cdot h$).
Площадь ромба также равна половине произведения длин его диагоналей. Например, площадь ромба, изображенного на чертеже, равна $\frac{AC \cdot BD}{2}$.

Трапеция

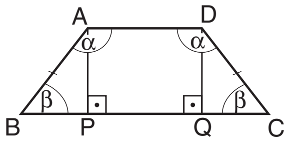
Трапецией называется четырехугольник, в котором **только** две стороны параллельны друг другу. Параллельные стороны трапеции называются „**основаниями**”. Две другие ее стороны называются „**боковыми сторонами**”. Основания трапеции не равны друг другу по длине, поэтому иногда их называют „большим основанием” и „меньшим основанием”.
Высотой трапеции является отрезок, соединяющий ее основания и перпендикулярный им.



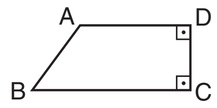
Площадь трапеции равна половине произведения суммы длин оснований трапеции на длину ее высоты.

Например, площадь трапеции, изображенной на чертеже, равна

$S = \frac{(a+b) \cdot h}{2}$

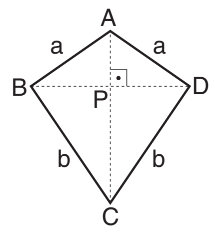


Равнобедренной трапецией называется трапеция, боковые стороны которой равны по длине. Например, на чертеже AB = DC.
В равнобедренной трапеции углы при большем основании равны, и углы при меньшем основании равны. Например на чертеже:
$\sphericalangle BAD = \sphericalangle CDA = \alpha$, $\sphericalangle ABC = \sphericalangle DCB = \beta$.
В равнобедренной трапеции при опускании двух высот из концов меньшего основания к большему основанию получают прямоугольник и два конгруэнтных прямоугольных треугольника (DCQ и ABP).



Прямоугольной трапецией называется трапеция, в которой один из углов при большем основании является прямым (как, разумеется, и один из углов при меньшем основании).

Дельтоид (דלתון)



Дельтоидом называется четырехугольник, образованный двумя равнобедренными треугольниками с общим основанием. Например, на приведенном чертеже дельтоид ABCD образован из треугольников ABD и BCD (AB = AD, CB = CD).

Диагональ, соединяющая вершины двух равнобедренных треугольников, делит пополам диагональ, которая является основанием этих равнобедренных треугольников, и перпендикулярна ей. Например, на чертеже: AC делит пополам BD (BP = PD), а также $AC \perp BD$.

Периметр дельтоида, изображенного на чертеже, равен 2a + 2b.

Площадь дельтоида равна половине произведения длин его диагоналей. Например, площадь дельтоида, изображенного на чертеже, равна $\frac{AC \cdot BD}{2}$.

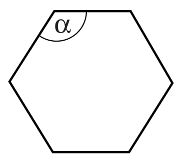
Правильный многоугольник

Правильным многоугольником называется многоугольник, все стороны которого равны по длине и все внутренние углы которого равны друг другу по величине.

Например: правильным восьмиугольником является правильный многоугольник с 8 сторонами.
Правильным пятиугольником является правильный многоугольник с 5 сторонами.
Квадрат - это правильный многоугольник с 4 сторонами.
Равносторонний треугольник - это правильный многоугольник с 3 сторонами.

Величину внутреннего угла α любого правильного многоугольника, имеющего n сторон, можно вычислить по формуле:

$$\alpha = \left(180^\circ - \frac{360^\circ}{n}\right) = \left(\frac{180^\circ n - 360^\circ}{n}\right)$$



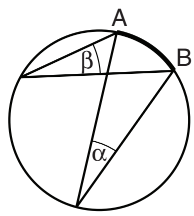
Например, на чертеже изображен правильный шестиугольник. Величина каждого из внутренних углов правильного шестиугольника равна 120°:

$$\alpha = 180^\circ - \frac{360^\circ}{6} = 120^\circ .$$

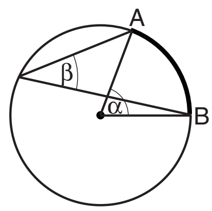
Круг, окружность

Радиусом называется отрезок, соединяющий центр окружности с какой-либо точкой, расположенной на данной окружности.
Хордой окружности называется отрезок, находящийся внутри окружности и соединяющий две различные точки, которые располагаются на данной окружности.
Диаметром называется хорда окружности, которая проходит через ее центр.
Длина диаметра окружности равна удвоенной длине ее радиуса.
Если обозначить через r длину радиуса окружности, то длина диаметра окружности будет равна $2r$.
Длина окружности радиусом r равна $2\pi r$ (значение π приблизительно равно 3.14).
Площадь круга радиусом r равна πr^2.
Часть окружности, заключенная между двумя точками, лежащими на данной окружности, называется **дугой**.
Часть круга, заключенная между двумя его радиусами и дугой, называется **сектором**.

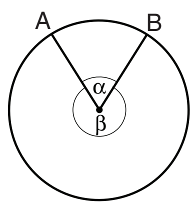
Вписанный в окружность угол
Вписанным в окружность углом называется угол, вершина которого располагается на окружности, а стороны являются хордами этой окружности. Вписанные в окружность углы, опирающиеся на одну и ту же дугу, равны по величине.
Например, на приведенном чертеже углы α и β являются вписанными в окружность углами, которые опираются на дугу AB. Поэтому, $\alpha = \beta$.
Вписанный в окружность угол, опирающийся на диаметр (то есть на дугу, длина которой равна половине длины окружности), является прямым углом.



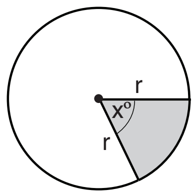
Центральный угол
Центральным углом называется угол, вершина которого лежит в центре окружности, а его стороны являются радиусами этой окружности. Величина центрального угла в 2 раза больше, чем величина любого вписанного в окружность угла, который опирается на ту же дугу.
Например, на чертеже α является центральным углом, а β вписанным углом, причем оба угла опираются на ту же дугу AB. Отсюда $\alpha = 2\beta$.



Длина дуги
Две точки, расположенные на окружности, задают две дуги.
Например, на чертеже точки A и B задают две дуги: одна из них соответствует центральному углу α, а вторая - центральному углу β.
Меньшая дуга AB соответствует меньшему из данных двух углов, α.
Если радиус окружности равен r , то длина этой дуги равна $2\pi r \cdot \frac{\alpha}{360}$.

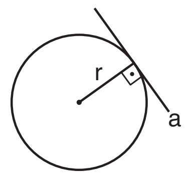


Площадь сектора
Центральный угол, заключенный между двумя радиусами, задающими сектор, называется углом сектора.
Например, закрашенная фигура на чертеже - это сектор круга с углом сектора $x°$.
Площадь сектора круга составляет $\pi r^2 \cdot \frac{x}{360}$.



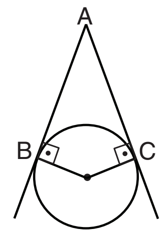
Касательная к окружности

Касательной к окружности называется прямая, касающаяся окружности в единственной точке, которая называется „точкой касания”.
Угол между касательной к окружности и радиусом окружности, опущенным в точку касания, является прямым.
Например, на чертеже прямая a является касательной к окружности с радиусом r .



Две прямые, касательные к одной и той же окружности и пересекающиеся в одной точке, также называются двумя касательными к окружности, исходящими из одной точки. Длина каждой из этих касательных равна длине отрезка, соединяющего точку пересечения этих касательных с точкой касания окружности соответствующей касательной. Касательные к окружности, исходящие из одной точки , равны друг другу по длине.

Например, на чертеже A - это точка пересечения, B и C - точки касания, и поэтому AB = AC .



Многоугольник, описанный вокруг окружности

Многоугольник, описанный вокруг окружности, это многоугольник, каждая из сторон которого является касательной к окружности.

Многоугольник, вписанный в окружность

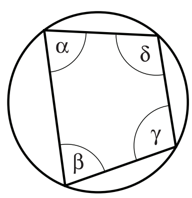
Вписанный в окружность многоугольник, это многоугольник, все вершины которого располагаются на окружности.

Треугольник, вписанный в окружность

Каждый треугольник может быть вписан в окружность.
Для любого треугольника существует единственная описанная около него окружность.
Если вписанный треугольник является прямоугольным, то центр описанной около него окружности находится в середине его гипотенузы.

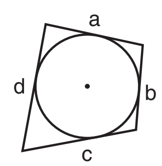
Четырехугольник, вписанный в окружность

Не всякий четырехугольник может быть вписан в окружность.
Сумма противоположных углов вписанного четырехугольника всегда составляет 180°. Например, на чертеже: $\alpha + \gamma = 180°$
$\beta + \delta = 180°$

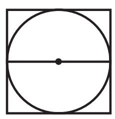


Четырехугольник, описанный вокруг окружности

Не всякий четырехугольник может быть описан вокруг окружности.
В четырехугольнике, описанном вокруг окружности, сумма длин каждой пары противоположных сторон равна.
Например, на чертеже: a + c = b + d .

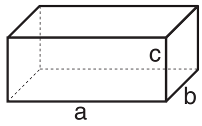


В случае квадрата, описанного вокруг окружности, длина его стороны равна диаметру этой окружности.



Трехмерные фигуры (тела)

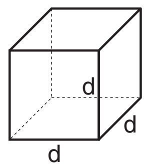
Прямоугольный параллелепипед и куб



Прямоугольный параллелепипед является трехмерной фигурой, обладающей шестью прямоугольными гранями. Длина, ширина и высота являются тремя измерениями прямоугольного параллелепипеда (соответственно a, b и c на чертеже).
Каждая грань прямоугольного параллелепипеда перпендикулярна соседним с ней граням.

Площадь полной поверхности прямоугольного параллелепипеда равна сумме площадей его граней. Площадь полной поверхности прямоугольного параллелепипеда, изображенного на чертеже, равна $ab + ac + bc + ab + ac + bc = 2ab + 2ac + 2bc$.

Объем прямоугольного параллелепипеда равен произведению его длины, ширины и высоты. Объем прямоугольного параллелепипеда, изображенного на чертеже, равен $a \cdot b \cdot c$.

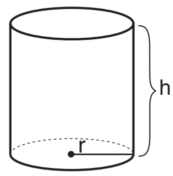


Кубом называется прямоугольный параллелепипед, длина, ширина и высота которого равны по величине.
Все грани куба являются конгруэнтными квадратами.
Площадь каждой грани куба, изображенного на чертеже, равна d^2.

Таким образом, **площадь полной поверхности** данного куба равна $6d^2$.

Объем изображенного на чертеже куба равен d^3.

Цилиндр

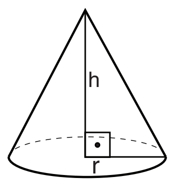


Цилиндром называется трехмерное тело с двумя основаниями, которые являются двумя конгруэнтными друг другу окружностями, расположенными в параллельных плоскостях, и соединяющей их боковой поверхностью. Линия, соединяющая центры этих окружностей, перпендикулярна каждому из оснований.

Площадь боковой поверхности цилиндра, радиус основания которого равен r, а высота h, равна произведению периметра основания на высоту цилиндра, то есть $2\pi r \cdot h$.
Площадь полной поверхности цилиндра равна сумме площадей его оснований и площади его боковой поверхности. Площадь каждого из оснований равна πr^2, а площадь боковой поверхности равна $2\pi r \cdot h$.
Таким образом, площадь полной поверхности цилиндра равна $2\pi r \cdot h + 2\pi r^2 = 2\pi r \cdot (h + r)$.

Объем цилиндра равен произведению площади одного из его оснований на его высоту, то есть $\pi r^2 \cdot h$.

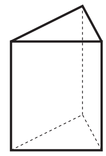
Конус

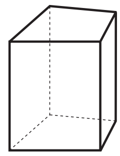


Прямой конус - это трехмерное тело, образованное посредством соединения точек, лежащих на некоторой окружности, с точкой, лежащей за пределами плоскости данной окружности. Эта точка называется „вершиной конуса” и располагается на прямой, которая перпендикулярна плоскости данной окружности и проходит через центр окружности (см. чертеж).

Объем конуса, радиус основания которого равен r, а высота - h, равен $\frac{\pi r^2 \cdot h}{3}$.

Призма





Прямая призма является трехмерной фигурой, в двух основаниях которой лежат конгруэнтные друг другу многоугольники, расположенные в параллельных плоскостях, а ее боковые грани являются прямоугольниками. Любая призма получает свое название по числу сторон ее основания. Например, в основаниях треугольной призмы лежат треугольники, в основаниях четырехугольной призмы лежат четырехугольники и т. д. (см. чертежи).

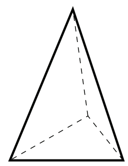
Высотой призмы является длина отрезка, соединяющего ее основания и перпендикулярного к ним, то есть расстояние между основаниями призмы.

Площадью боковой поверхности призмы является сумма площадей всех ее боковых граней. Ее также можно вычислить как произведение периметра основания призмы на ее высоту.

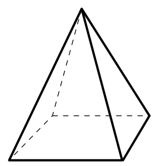
Площадью полной поверхности призмы является сумма площадей боковой поверхности призмы и площадей двух ее оснований.

Объем призмы равен произведению площади одного из ее оснований на ее высоту.

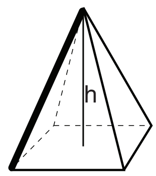
Пирамида



Прямой пирамидой называется трехмерная фигура, образованная соединением вершин некоторого правильного многоугольника с точкой, лежащей за пределами плоскости этого многоугольника. Такой многоугольник называется „основанием пирамиды", а такая точка называется „вершиной пирамиды".



Боковые грани пирамиды являются треугольниками.
Любая пирамида получает свое название по числу сторон ее основания. Например, в основании треугольной пирамиды лежит треугольник, в основании четырехугольной пирамиды лежит четырехугольник и т. д. (см. чертежи).



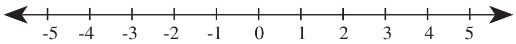
Высотой пирамиды называется длина отрезка, опущенного из вершины пирамиды к ее основанию и перпендикулярного плоскости ее основания, то есть расстояние между вершиной пирамиды и ее основанием (см. чертеж).

Если S - это площадь основания пирамиды, а h - высота этой пирамиды, то **объем** пирамиды равен $\frac{S \cdot h}{3}$.

Ребро
Ребром в трехмерной фигуре называют прямую линию, образующуюся в месте соединения двух граней. В изображенной выше пирамиде отрезок, выделенный жирной линией, является одним из ребер.
В прямоугольном параллелепипеде есть 12 ребер.

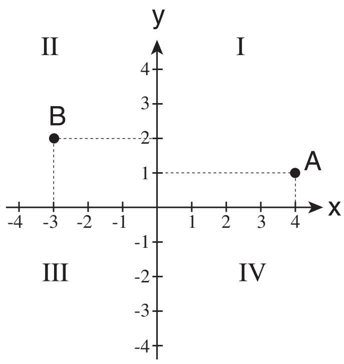
Числовая ось

Числовая ось служит для геометрического представления соотношений между числами.



Числа увеличиваются по мере продвижения вправо по числовой оси. Расстояние между точками на числовой оси пропорционально разности между числовыми значениями соответствующих точек. Например, расстояние между точками, соответствующими числам (-4) и (-2), равно расстоянию между точками, соответствующими числам 3 и 5.

Декартова система координат
Декартова система координат на плоскости состоит из двух числовых осей, перпендикулярных друг другу. Горизонтальная ось называется осью x, а вертикальная ось - осью y. На оси x числа увеличиваются по мере продвижения вправо. На оси y числа увеличиваются по мере продвижения вверх.



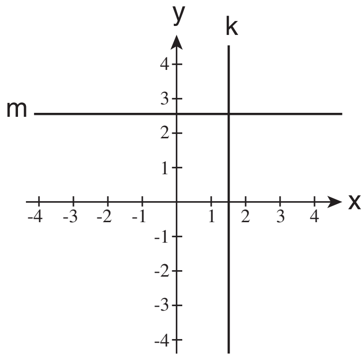
Оси координат делят плоскость на четыре квадранта, обычно обозначенных на чертеже римскими цифрами I , II, III, IV.

Каждая точка в данной плоскости соответствует паре чисел (координат) x и y, обозначающих местоположение данной точки по отношению к осям координат. Например, координата x точки A на приведенном чертеже равна 4, а ее координата y равна 1. Координата x точки B равна (-3), а ее координата y равна 2.

Координаты точек принято заключать в скобки, причем координату x пишут слева от координаты y следующим образом: (x ; y). Иногда координаты точки обозначают рядом с обозначающей ее буквой без интервала. Например, A(4 ; 1), B(-3 ; 2).

Точка плоскости, соответствующая (0 ; 0), является точкой пересечения осей координат. Ее принято называть „**точкой начала координат**".

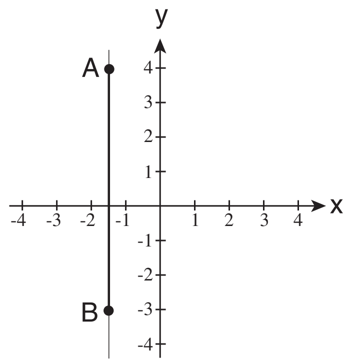
Все точки, располагающиеся на прямой, параллельной оси x, имеют одну и ту же координату y, а все точки, располагающиеся на прямой, параллельной оси y, имеют одну и ту же координату x.



Например, на чертеже:
прямая k параллельна оси y , и поэтому все точки на прямой k имеют одну и ту же координату x.
(На чертеже x = 1.5)

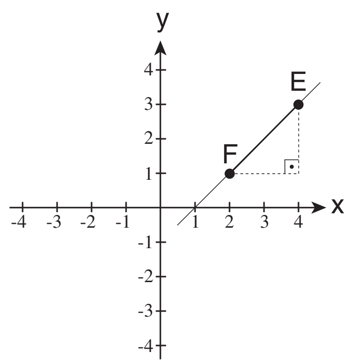
Прямая m параллельна оси x , и поэтому все точки на прямой m имеют одну и ту же координату y.
(На чертеже y = 2.5)

Через любые две точки, расположенные в плоскости, проходит единственная прямая. Часть данной прямой, заключенная между двумя данными точками, называется отрезком.



Если отрезок параллелен оси y, то его длина равна разности (в абсолютных значениях) координат y, соответствующих данным точкам.
Например, на чертеже отрезок AB параллелен оси y. Координата y точки A равна 4, а координата y точки B равна (-3), и разность между координатами y равна 4 – (-3) = 7. Таким образом, длина отрезка AB равна 7.

Аналогичным образом вычисляют длину отрезка, параллельного оси x .



Если отрезок не является параллельным одной из осей (например, отрезок EF на чертеже), то его длину можно вычислить при помощи теоремы Пифагора.
Для этого необходимо начертить прямоугольный треугольник, в котором данный отрезок является гипотенузой и чьи катеты параллельны оси x и оси y. Длина катета, параллельного оси x, равна разности координат x точек E и F (4 – 2 = 2), а длина катета, параллельного оси y, равна разности координат y точек E и F (3 – 1 = 2). Таким образом, при помощи теоремы Пифагора можно вычислить длину гипотенузы:
$EF = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8}$

СЛОВАРЬ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ТЕРМИНОВ

(иврит - русский)

א

אורך	длина
אחוז	процент
אי–זוגי	нечётный
אי–שוויון	неравенство
איבר	член
אינסוף	бесконечность
אלכסון	диагональ
אמצע	середина
אנכי	вертикальный, перпендикулярный

ב

באקראי	случайным образом
בהכרח	непременно
ביטוי	выражение
בסיס	основание
בסיס החזקה	основание степени
בקירוב	приблизительно

ג

גדול ב–3	больше на 3
גדול פי 3	больше в 3 раза
גובה	высота
גודל	величина
גורם	делитель, множитель
גזרה	сектор
גליל	цилиндр
גרף	график

ד

דלתון	дельтоид (четырехугольник, образованный двумя равнобедренными треугольниками с общим основанием)
דמיון	подобие
דרך	путь

ה

הופכי	обратное (число)
היקף	периметр
הספק	мощность, производительность
הסתברות	вероятность
העלאה בחזקה	возведение в степень
הפרש	разность
הצבה	подстановка

ז

זוגי	четный
זווית	угол
זווית היקפית	угол, вписанный в окружность
זווית חדה	острый угол
זווית חיצונית	внешний угол
זווית ישרה	прямой угол
זווית מרכזית	центральный угол
זווית פנימית	внутренний угол
זווית קהה	тупой угол
זוויות משלימות	дополнительные углы
זוויות מתאימות	соответственные углы
זוויות מתחלפות	внутренние накрест лежащие углы
זוויות נגדיות	противоположные углы (в четырехугольнике)
זוויות קדקדיות	вертикальные углы

ח

חוסם	описан (около)
חופף	конгруэнтный
חוצה	делит на две равные части
חוצה זווית	биссектриса
חותך	пересекает
חזקה	степень
חיבור	сложение
חיובי	положительный
חילוק	деление
חיסור	вычитание
חסום	вписан (в)
חרוט	конус

ט

טבלה	таблица
טווח	интервал
טענה	утверждение
טרפז	трапеция

י

יחס	отношение
ישר	прямая
ישר–זווית	прямоугольный
יתר	гипотенуза

כ

כדור	шар
כלוא	заключен (в, между)
כפולה	кратное
כפל	умножение
כפל מקוצר	сокращенное умножение

מ

מאונך	перпендикулярный
מהירות	скорость
מונה	числитель
מחומש	пятиугольник
מחומש משוכלל	правильный пятиугольник
מחלק	делитель
מטבע הוגן	стандартная (симметричная) монета
מינימום	минимум
מינימלי	минимальный
מישור	плоскость
מיתר	хорда
מכנה	знаменатель
מכנה משותף	общий знаменатель
מכפלה	произведение
מלבן	прямоугольник
ממוצע	среднее
ממוצע חשבוני	среднее арифметическое
ממוצע משוקלל	взвешенное среднее
מנה	частное
מנסרה	призма
מנסרה משולשת	треугольная призма
מספר	число
מספר אי-זוגי	нечетное число
מספר דו-ספרתי	двузначное число
מספר זוגי	чётное число
מספר ראשוני	простое число
מספר שלם	целое число
מספר תלת-ספרתי	трёхзначное число
מספרים עוקבים	последовательные числа
מעגל	окружность
מעוין	ромб
מעטפת	боковая поверхность
מעלה (°)	градус (°)
מעריך החזקה	показатель степени
מצולע	многоугольник
מצולע משוכלל	правильный многоугольник
מצטמצם	сокращается
מקביל	параллельный
מקבילית	параллелограмм
מקסימום	максимум
מקסימלי	максимальный
מקצוע	ребро
מרובע	четырехугольник
מרכז	центр
משוואה	уравнение
משולש	треугольник
משולש הזהב	треугольник, величины углов которого равны 30°, 60°, 90°
משולש חד-זווית	остроугольный треугольник
משולש ישר-זווית	прямоугольный треугольник
משולש קהה-זווית	тупоугольный треугольник
משולש שווה-צלעות	равносторонний треугольник
משולש שווה-שוקיים	равнобедренный треугольник
משושה	шестиугольник
משושה משוכלל	правильный шестиугольник
משותף	общий
משיק	касательная
משפט פיתגורס	теорема Пифагора
משתנה	переменная
מתומן	восьмиугольник
מתומן משוכלל	правильный восьмиугольник
מתחלק	делится
מתחלק ללא שארית	делится без остатка
מתקיים	выполняется

נ

נובע	следует, вытекает
נוסחה	формула
נחתך	пересекается
ניצב	перпендикулярный, перпендикуляр
ניצב (במשולש)	катет
נפח	объем
נקודה	точка
נקודת חיתוך	точка пересечения
נתון	дано, данный

ס

סדר השורש (מעלת השורש)	порядок (степень) корня
סדרה	последовательность
סיכוי	шанс
סימן	знак
סך הכל	всего
סכום	сумма
ספרה	цифра
ספרת אחדות	цифра, обозначающая единицы
ספרת מאות	цифра, обозначающая сотни
ספרת עשרות	цифра, обозначающая десятки
סרטוט	чертёж

ע

עוקב	последовательный
עיגול	круг
עצרת	факториал
ערך	значение, координата
ערך מוחלט	абсолютное значение

פ

грань	פאה
пирамида	פירמידה
действие	פעולה
пропорция	פרופורציה
решение	פתרון

צ

форма, фигура	צורה
ось	ציר
комбинация, сочетание	צירוף
сторона	צלע

ק

постоянный	קבוע
группа, множество	קבוצה
вершина	קדקוד
линия	קו
прямая линия	קו ישר
игральная кость, куб	קובייה
стандартная (симметричная) игральная кость	קובייה הוגנת
диаметр	קוטר
комбинаторика	קומבינטוריקה
усечённый	קטום
отрезок	קטע
существует	קיים
масштаб	קנה מידה
луч	קרן
дуга	קשת
меньшая дуга	קשת קצרה

ר

простое (число)	ראשוני
радиус	רדיוס
ширина	רוחב
квадрат	ריבוע

ש

остаток (деления)	שארית (החלוקה)
дробь	שבר
равно	שווה
равносторонний	שווה צלעות
равнобедренный	שווה שוקיים
боковые стороны треугольника	שוקיים
корень	שורש
квадратный корень	שורש ריבועי
площадь	שטח
площадь боковой поверхности	שטח מעטפת
площадь полной поверхности	שטח פנים
отрицательный	שלילי
целое (число)	שלם (מספר)

ת

область	תחום
прямоугольный параллелепипед	תיבה
медиана	תיכון
диаграмма	תרשים

Вопросы и задачи

Вопросы из области алгебры касаются таких тем, как решение уравнений, пройденный путь, производительность, комбинаторика и теория вероятностей т. д. Вопросы из области геометрии касаются различных свойств геометрических фигур, например площади, объема, углов и т. д. Некоторые вопросы сформулированы словесно, и следует вначале переформулировать их в математических терминах. Другие вопросы не содержат словесной информации, и задача сформулирована в них с самого начала в математических терминах. Ниже приведены примеры вопросов, ответы на них и пояснения к ответам.

Обратите внимание: В данной брошюре вопросы разделены на группы согласно их типам, однако в тексте самого экзамена подобное разделение отсутствует.

Алгебраические вопросы, сформулированные словесно

1. Водитель проехал из Хайфы в Эйлат за определенный период времени. Треть пути он проехал со скоростью 75 км/ч, пятую часть остатка пути он проехал за один час, а остальную часть пути он проехал со скоростью 80 км/ч. Расстояние между Хайфой и Эйлатом равно 450 км.

Если бы водитель ехал с постоянной скоростью на всем протяжении пути, то какова должна была бы быть его скорость, с тем чтобы поездка из Хайфы в Эйлат продлилась в точности столько же времени?

(1) 70 км/ч (2) 75 км/ч (3) 80 км/ч (4) 90 км/ч

Этот вопрос представляет собой математическую задачу, сформулированную словесно, и поэтому на первом этапе вам следует переформулировать ее в математических терминах. Прежде всего, четко определим, что именно вам следует найти: **скорость**, с которой следует ехать, для того чтобы преодолеть **расстояние** между Хайфой и Эйлатом за то же самое **время**, за которое его преодолел водитель, упомянутый в тексте вопроса. Таким образом, это вопрос на пройденный путь, и можно решить его с применением формулы связи между расстоянием, скоростью и временем: $v = \frac{s}{t}$. Значение расстояния (s) дано в условии задачи, значение времени (t) можно вычислить, а значение скорости (v) является неизвестным, которое следует найти.
В условии задачи сказано, что расстояние между Хайфой и Эйлатом составляет 450 км. Общее время, которое потребовалось водителю для того, чтобы преодолеть все расстояние от Хайфы до Эйлата, можно вычислить следующим образом.
В соответствии с условиями задачи, путь делится на три отрезка. Вычислим, за сколько времени водитель проезжает каждый из этих трех отрезков:

а) Треть пути составляет **150 км** (так как $450 \cdot \frac{1}{3}$ равно 150). Этот отрезок пути водитель проехал за **два часа**, так как для преодоления 150 км со скоростью 75 км/ч требуется два часа $\left(\frac{150}{75} = 2\right)$.

б) Пятая часть остатка пути равна **60 км**, так как длина остатка пути равна $450 - 150 = 300$, а $\frac{1}{5} \cdot 300$ равно 60. В условии задачи сказано, что водитель проехал эту часть пути **за один час**.

в) Остальная часть пути составляет **240 км**, поскольку $450 - 150 - 60 = 240$. Эту часть пути водитель проехал за **три часа**, так как требуются три часа, чтобы проехать 240 км со скоростью 80 км/ч.

Таким образом, поездка из Хайфы в Эйлат заняла в общей сложности 6 часов (сумма двух часов, одного часа и трех часов).
Теперь можно вычислить постоянную скорость, с которой следует ехать, для того чтобы преодолеть 450 км за **6 часов**. Для этого подставим в соответствующую формулу числовые значения: $v = \frac{s}{t} = \frac{450}{6} = 75$, то есть скорость равна 75 км/ч.
Правильным ответом является (2).

2. За 10-й день своей жизни слоненок съедает 5 конфет. С этого дня и далее его аппетит растет, и каждый день он съедает в 2 раза больше конфет, чем за предыдущий день.

Сколько конфет он съест за 14-й день своей жизни?

(1) 40
(2) 80
(3) 100
(4) 120

За 10-й день слоненок съедает 5 конфет. Так как после этого он каждый день съедает в 2 раза больше конфет, чем за предыдущий день, то за 11-й день он съедает 10 конфет ($5 \cdot 2$), за 12-й день - 20 конфет ($5 \cdot 2 \cdot 2$) и так далее.
В общем виде, за день ($10 + n$) слоненок съест $5 \cdot 2^n$ конфет (если n является целым и положительным числом).
Поэтому за 14-й день он съест 80 конфет ($5 \cdot 2^4 = 80$).
Правильным ответом является (2).

3. В рамках комплексного обеда в некотором ресторане можно выбрать один из 3 различных видов закуски и одно из 4 различных основных блюд. В дополнение к закуске и основному блюду можно также заказать суп или десерт.

Сколько различных вариантов комплексного обеда из 3 блюд можно составить в этом ресторане?

(1) 12
(2) 14
(3) 18
(4) 24

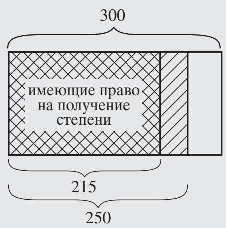
Существуют **три** возможных варианта выбора закуски. К каждому выбранному виду закуски можно добавить одно из **четырех** различных основных блюд. Таким образом, имеется $3 \cdot 4$ различных сочетаний закуски и основного блюда. К каждому из этих 12 сочетаний можно добавить суп или десерт, то есть в общей сложности существует $12 \cdot 2$ различных сочетаний трех блюд, то есть 24 варианта обеда.
Итак, правильным ответом является (4).

4. Студент получит первую академическую степень только в том случае, если сдаст все экзамены и представит все семинарские работы. Из 300 студентов 250 сдали все экзамены и 215 представили все работы.

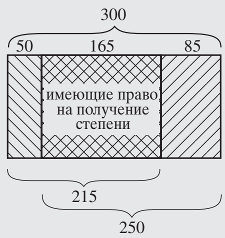
Сколько студентов получили первую академическую степень?

(1) по меньшей мере 215
(2) не более 185
(3) в точности 215
(4) по меньшей мере 165

Можно выделить две группы студентов: группу студентов, которые представили все работы, и группу студентов, которые сдали все экзамены. Каждый студент, относящийся к обеим данным группам, имеет право на получение первой академической степени. Степень совпадения данных двух групп неизвестна, однако существуют два возможных крайних положения. Изобразим их графически:



- В положении **максимального совпадения** этих групп число имеющих право на получение степени будет максимальным. Максимальное совпадение будет в том случае, если все 215 студентов, представивших все работы, также сдали все экзамены. Другими словами, **не более** 215 студентов могут получить степень.



- В положении **минимального совпадения** этих групп число имеющих право на получение степени будет минимальным. 50 студентов (300 – 250) не имеют права на получение степени, поскольку они не сдали все экзамены, а 85 студентов (300 – 215) не имеют права на получение степени, поскольку они не представили все работы. Таким образом, число студентов, не имеющих права на получение степени по меньшей мере по одной из двух этих причин, равно 50 + 85 = 135. Таково максимальное число студентов, не имеющих права на получение степени. Отсюда минимальное количество имеющих право на получение степени равно 300 – 135 = 165. То есть, **по меньшей мере** 165 студентов имеют право на получение степени.

Таким образом, число студентов, имеющих право на получение первой степени, находится в интервале от 165 до 215, и поэтому правильным ответом является ответ (4).

5. Определенное предприятие работает в постоянном темпе и производит 20 автомашин за 4 дня.

Сколько автомашин можно произвести на 3 подобных предприятиях, работающих в том же самом темпе, за 6 дней?

(1) 60
(2) 80
(3) 90
(4) 120

Данный вопрос касается производительности. Одним из способов решения подобной задачи является вычисление производительности единицы производства (в данном случае одного предприятия) за единицу времени (в данном случае за один день) и умножение полученного числа на количество единиц производства (3 предприятия) и на количество единиц времени (6 дней). Таким образом, если предприятие производит 20 автомашин за 4 дня, то каждый день оно производит 5 автомашин $\left(\frac{20}{4} = 5\right)$. Поэтому за 6 дней 3 предприятия произведут $5 \cdot 3 \cdot 6$ автомашин, то есть 90 автомашин.
Правильным ответом является (3).

6. В ящике находились 20 белых шапок и 13 черных шапок. Яша случайным образом извлек из ящика одну за другой 3 черные шапки, не возвращая их обратно в ящик.

Какова вероятность того, что и четвертая шапка, которую он извлечет из ящика случайным образом, будет черной?

(1) $\frac{13}{33}$

(2) $\frac{10}{33}$

(3) $\frac{1}{3}$

(4) $\frac{1}{33}$

Вам следует вычислить вероятность извлечения Яшей черной шапки после того, как уже были извлечены три черные шапки. Эта вероятность равна частному от деления числа черных шапок, оставшихся в ящике, на общее число шапок (черных и белых), которые находятся в ящике.
После того как были извлечены три черные шапки, в ящике осталось 10 черных шапок и 20 белых шапок. То есть, из 30 шапок, оставшихся в ящике, 10 являются черными. Поэтому, при сложившихся обстоятельствах, вероятность извлечения черной шапки составляет $\frac{10}{30}$ или $\frac{1}{3}$.
Правильным ответом является (3).

Алгебраические вопросы, сформулированные невербальным образом

1. Дано: $2^x \cdot 2^y = 32$

$x + y = ?$

(1) 8
(2) 7
(3) 5
(4) 4

В соответствии с правилами действий со степенями, для умножения степеней с одинаковым основанием можно сложить их показатели. Поэтому $2^x \cdot 2^y = 2^{x+y}$.
В соответствии с данными вопроса, $2^{x+y} = 32$. Чтобы найти значение выражения $x + y$, нам следует выразить 32 в виде степени с основанием 2: $32 = 2^5$. Отсюда следует, что $2^{x+y} = 2^5$. Поскольку в двух равных друг другу степенях с одинаковым основанием показатели также равны, то $x + y = 5$.
Поэтому правильным ответом является (3).

---

2. Средним значением трех чисел x, y и z является $x \cdot y$.

$z = ?$

(1) $3 \cdot x \cdot y - x - y$
(2) $x \cdot y - x - y$
(3) $3 \cdot x \cdot y + x + y$
(4) $3 \cdot x \cdot y - (x - y)$

Среднее (арифметическое) группы чисел равно сумме данных чисел, деленной на их количество, поэтому среднее арифметическое x, y и z равно $\frac{x+y+z}{3}$.
Подставим в это уравнение данные вопроса $\frac{x+y+z}{3} = x \cdot y$, умножим обе части уравнения на 3: $x + y + z = 3 \cdot x \cdot y$,
и выделим z: $z = 3 \cdot x \cdot y - x - y$.
Правильным ответом является (1).

---

3. Действие \$ определено для любых двух чисел a и b следующим образом:
$\$(a , b) = a \cdot (a + b)$

$\$(\$(2 , 0) , 1) = ?$

(1) 20 (2) 12 (3) 10 (4) 4

В выражении $\$(\$(2 , 0) , 1)$, значение которого необходимо найти, $a = \$(2 , 0)$ и $b = 1$.
Согласно определению данного действия $\$(\$(2 , 0) , 1) = \$(2 , 0) \cdot (\$(2 , 0) + 1)$.
Таким образом, для вычисления требуемого значения выражения следует вначале вычислить $\$(2 , 0)$.
Согласно определению данного действия, $\$(2 , 0) = 2 \cdot (2 + 0) = 4$.
Подставим значение, полученное нами для $\$(2 , 0)$, в искомое выражение и получим $\$(\$(2 , 0) , 1) = \$(4 , 1)$.
Согласно определению данного действия, $\$(4 , 1) = 4 \cdot (4 + 1) = 20$.
Правильным ответом является (1).

---

4. Дано: B < C
B < D < A

Какое из следующих выражений непременно верно?

(1) C < D
(2) D < C
(3) C < A
(4) ни одно из вышеприведенных выражений не является непременно верным

На основании имеющихся данных невозможно сделать вывод о соотношении между C и A и D. Согласно данным, возможны три следующих положения:
а. B < C < D < A
б. B < D < C < A
в. B < D < A < C
Выражение (1) является верным в положении (а), но не является верным в положениях (б) и (в). Выражение (2) является верным в положениях (б) и (в), но не является верным в положении (а). Выражение (3) является верным в положениях (а) и (б), но не является верным в положении (в). Таким образом, каждое из данных выражений может быть верным в определенном положении и неверным в другом положении.
Поэтому ни один из ответов (1) - (3) не является **непременно** верным, и правильный ответ - (4).

5. K является четным числом, а P - нечетным числом.

Какое из следующих утверждений **не является** верным?

(1) $P - K - 1$ является нечетным числом
(2) $P + K + 1$ является четным числом
(3) $P \cdot K + P$ является нечетным числом
(4) $P^2 + K^2 + 1$ является четным числом

Исследуем каждое из данных утверждений:

(1) Разность нечетного числа (P) и четного числа (K) является нечетным числом, поэтому разность $P - K$ является нечетным числом. При вычитании 1 из полученного нечетного числа получают четное число. Поэтому $P - K - 1$ - **четное** число, и данное утверждение является **неверным**.

(2) Сумма нечетного числа (P) и четного числа (K) является нечетным числом, поэтому сумма $P + K$ является нечетным числом. При прибавлении 1 к полученному нечетному числу получают четное число. Поэтому $P + K + 1$ - **четное** число, и данное утверждение является **верным**.

(3) Произведение четного числа на любое целое число является четным, поэтому и произведение $P \cdot K$ является четным числом. При прибавлении нечетного числа P к полученному четному произведению получают нечетное число. Поэтому $P \cdot K + P$ - **нечетное** число, и данное утверждение является **верным**.

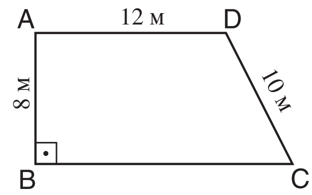
(4) Квадрат нечетного числа (P^2) - это нечетное число, так как оно является произведением нечетного числа на нечетное число ($P \cdot P$), а квадрат четного числа (K^2) - это четное число, так как оно является произведением четного числа на четное число ($K \cdot K$). Сумма двух квадратов ($P^2 + K^2$) является нечетной (сумма нечетного числа и четного числа). Поэтому при прибавлении к ней 1 получают четное число. Отсюда, $P^2 + K^2 + 1$ - **четное** число, данное утверждение является **верным**.

При ответе на данный вопрос Вам следует указать, какое утверждение **не является** верным, поэтому правильный ответ - (1).

Вопросы по геометрии

1. На следующем чертеже изображена прямоугольная трапеция (AD || BC).

Согласно этим данным и данным чертежа, какова площадь данной трапеции (в $м^2$)?



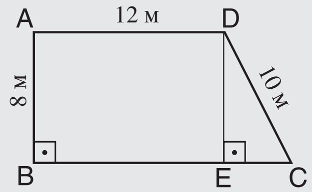
(1) 150
(2) 120
(3) 108
(4) 96

Формулой для вычисления площади трапеции, в которой одно из оснований a , второе основание - b, а высота - h является $S = \frac{(a+b)\cdot h}{2}$.
Данная трапеция является прямоугольной, и поэтому боковая сторона, перпендикулярная ее основаниям, равна высоте трапеции. На чертеже приведены длина меньшего основания трапеции и высота трапеции, но отсутствует длина большего основания. Для того чтобы вычислить длину большего основания, опустим перпендикуляр из точки D к основанию BC (DE на чертеже). При этом мы получим прямоугольник ABED длиной 12 м и шириной 8 м. Отсюда следует, что DE = 8, а BE = 12.
Для вычисления длины большего основания трапеции необходимо теперь лишь вычислить длину EC. Это можно сделать при помощи теоремы Пифагора. В прямоугольном треугольнике DEC: $DC^2 = DE^2 + EC^2$.

Выделим EC: $EC = \sqrt{DC^2 - DE^2}$.

Подставим данные: $EC = \sqrt{10^2 - 8^2} = 6$.

Таким образом, длина большего основания равна 18 м (6 м + 12 м).



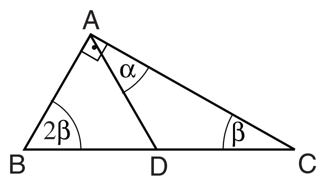
Теперь вычислим площадь трапеции: $S = \frac{(12+18)\cdot 8}{2} = 120$.

Итак, площадь трапеции равна 120 $м^2$, и верным ответом является ответ (2).

2. На приведенном ниже рисунке ABC является прямоугольным треугольником, ABD является равнобедренным треугольником (AB=AD).

На основании этих данных и данных чертежа,

$\alpha = ?$

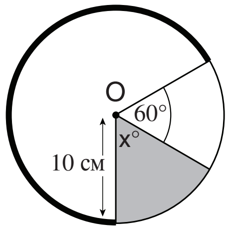


(1) 60°
(2) 45°
(3) 30°
(4) 25°

Сумма углов треугольника равна 180°. Поэтому в треугольнике ABC выполняется равенство $90° + 2\beta + \beta = 180°$.
Решим данное уравнение и получим, что $\beta = 30°$.
Дано, что треугольник ABD является равнобедренным. Из этого следует, что $\sphericalangle ABD = \sphericalangle ADB$.
$\sphericalangle ABD = 2\beta = 60°$, то есть также и $\sphericalangle ADB = 60°$.
В треугольнике ABD выполняется $\sphericalangle BAD + \sphericalangle ABD + \sphericalangle ADB = 180°$. Другими словами, $\sphericalangle BAD = 180° - \sphericalangle ABD - \sphericalangle ADB$. Подставим вычисленные нами значения углов и получим: $\sphericalangle BAD = 180° - 60° - 60° = 60°$. Согласно чертежу, $\sphericalangle BAD + \alpha = \sphericalangle BAC$. Подставим значения углов и получим $60° + \alpha = 90°$, поэтому $\alpha = 30°$.
Правильным ответом является (3).

3. На приведенном чертеже изображен круг с центром O и радиусом длиной в 10 см. Дано, что площадь закрашенной фигуры равна $\frac{1}{6}$ площади круга.

На основании этих данных и данных чертежа, найдите длину выделенной дуги (в см).



(1) 30π

(2) $\frac{40\pi}{3}$

(3) $\frac{20\pi}{3}$

(4) 20π

Длина выделенной дуги равна периметру полного круга за вычетом длины невыделенной дуги. Для того чтобы найти длину невыделенной дуги, вам следует вычислить величину центрального угла, который опирается на нее. Величина этого угла равна $x° + 60°$ (в соответствии с данными чертежа). x - угол при вершине закрашенного сектора круга. Величину этого угла можно найти из формулы площади сектора круга $\pi r^2 \cdot \frac{x}{360}$.

Дано, что площадь закрашенного сектора равна $\frac{1}{6}$ площади круга, то есть $\frac{\pi r^2}{6}$ (поскольку площадь полного круга равна πr^2).

Отсюда мы получим уравнение $\pi r^2 \cdot \frac{x}{360} = \frac{\pi r^2}{6}$. Сократим обе части данного выражения на πr^2: $\frac{x}{360} = \frac{1}{6}$ и выделим x: $x = \frac{360}{6} = 60$. Величина центрального угла, на который опирается невыделенная дуга, составляет $x° + 60° = 60° + 60° = 120°$. Длина дуги, опирающейся на этот угол, равна $2\pi r \cdot \frac{120}{360} = 2\pi r \cdot \frac{1}{3}$, то есть $\frac{1}{3}$ от периметра круга.

Поэтому длина выделенной дуги равна $\frac{2}{3}$ от периметра круга.

Периметр круга (длина окружности в см) равен $2\pi r = 2\pi \cdot 10 = 20\pi$, поэтому $\frac{2}{3}$ от периметра этого круга равны $\frac{2}{3} \cdot 20\pi = \frac{40\pi}{3}$.

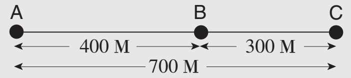
Таким образом, длина выделенной дуги составляет $\frac{40\pi}{3}$ см, и верным ответом является (2).

4. Расстояние между точками A и B равно 400 метров. Расстояние между точками B и C равно 300 метров.

Отсюда следует, что расстояние между точками A и C **непременно** равно -

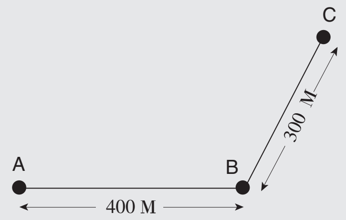
(1) 100 метров
(2) 500 метров
(3) 700 метров
(4) невозможно установить на основании имеющихся данных

В условии вопроса отсутствуют данные об относительном расположении трех этих точек. Возможны различные положения, например:

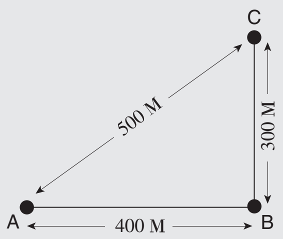


соответствует ответу (3)

соответствует ответу (1)



не соответствует ни одному из ответов (1)-(3)



соответствует ответу (2)

Все данные положения, как и ряд других, возможны, но ни одно их них не является непременно верным.
Поэтому правильным ответом будет (4).

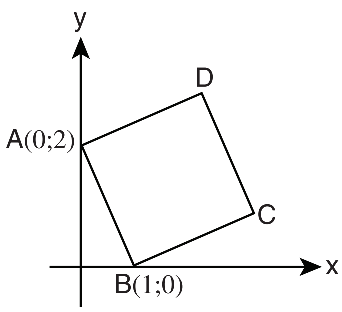
5. В приведенной системе координат дан квадрат ABCD.
Какова площадь данного квадрата?

(1) невозможно установить на основании имеющихся данных

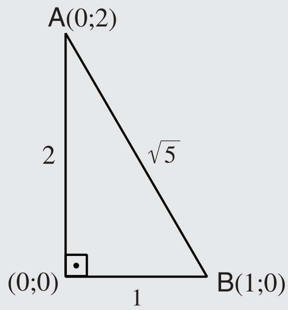
(2) 6

(3) 5

(4) 4



Для вычисления площади квадрата следует найти длину его стороны. Длина стороны квадрата - это расстояние между каждыми двумя соседними вершинами квадрата, например между A и B. Поскольку отрезок AB не параллелен ни одной из осей координат, вычислим его длину с помощью теоремы Пифагора.
Точка начала координат и точки A и B образуют прямоугольный треугольник, гипотенузой которого является AB. Длина одного катета равна расстоянию между точкой начала координат (0;0) и точкой A (0;2), то есть равна 2. Длина второго катета равна расстоянию между точкой начала координат (0;0) и точкой B (1;0), то есть равна 1.
Согласно теореме Пифагора, длина гипотенузы AB равна $\sqrt{2^2+1^2} = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}$.
Таким образом, длина стороны квадрата равна $\sqrt{5}$, а площадь квадрата равна $(\sqrt{5})^2 = 5$.
Верным ответом является (3).



6. На приведенном чертеже ABC - прямоугольный треугольник. BD - биссектриса угла $\sphericalangle ABC$.

На основании этих данных и данных чертежа,

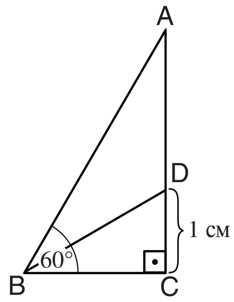
AD = ?

(1) 1 см

(2) 2 см

(3) $\sqrt{3}$ см

(4) $\frac{4}{\sqrt{3}}$ см



Сумма углов треугольника равна 180°, поэтому $\sphericalangle BAD = 30°$. Из данного о том, что BD является биссектрисой $\sphericalangle ABC$ следует, что $\sphericalangle ABD = 30°$.
В треугольнике ADB, $\sphericalangle BAD = \sphericalangle ABD$, поэтому треугольник ADB является равнобедренным (AD = BD).
BD также является гипотенузой треугольника BDC. В этом треугольнике углы равны 30°, 60° и 90°, поэтому $BD = 2 \cdot CD = 2 \cdot 1 = 2$ см.
Поскольку AD = BD, то AD = 2 см и верным ответом является (2).

7. Жидкость, наполняющую сосуд в форме прямоугольного параллелепипеда, размеры которого 2 см x 10 см x 20 см, полностью переливают в цилиндрический сосуд с радиусом основания 5 см.

На какой высоте (в см) будет находиться поверхность жидкости в цилиндрическом сосуде?

(1) $\frac{16}{\pi}$

(2) $\frac{40}{\pi}$

(3) 8π

(4) 8

Объем прямоугольного параллелепипеда равен произведению трех его измерений. Поэтому объем жидкости в данном сосуде равен $(20 \cdot 10 \cdot 2)$ см^3, то есть 400 см^3. После переливания в цилиндрический сосуд объем жидкости не изменяется. Вам следует найти высоту цилиндра, радиус основания которого равен 5 см, а объем - 400 см^3. На этой высоте и будет находиться уровень жидкости в цилиндре.
Объем цилиндра вычисляется по формуле $V = \pi r^2 \cdot h$. Вам следует найти h, если дано, что r = 5 см, а V составляет 400 см^3.
Подставим данные в формулу вычисления объема: $400 = \pi \cdot 5^2 \cdot h = \pi \cdot 25 \cdot h$.
Чтобы выделить h, разделим обе части данного уравнения на 25π: $h = \frac{400}{25\pi} = \frac{16}{\pi}$. Верным ответом является (1).

Выводы из диаграммы или таблицы

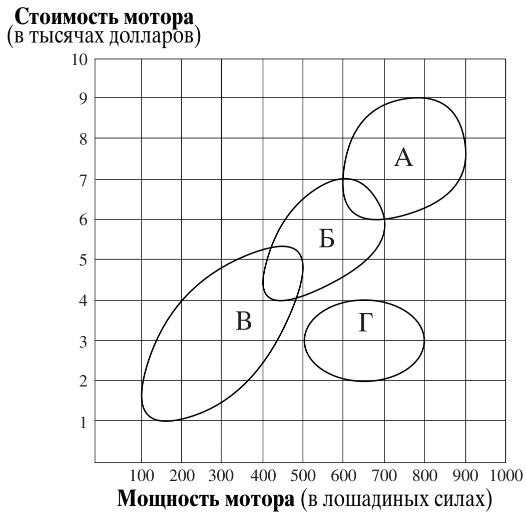
Данная категория вопросов касается информации, содержащейся на диаграммах или в таблицах. Диаграмма или таблица обычно сопровождаются кратким объяснением. В таблицах представлены данные, распределенные по столбцам и строкам. На диаграммах данные представлены графически, например в виде кривых, столбиков и т. д.
Ниже приведены примеры диаграммы и таблицы, за которыми следует несколько вопросов с объяснениями.

Выводы из диаграммы

Внимательно рассмотрите приведенную диаграмму и ответьте на следующие за ней вопросы.

На диаграмме изображены данные о четырех различных технологиях производства определенного типа мотора.
Каждая из этих технологий обозначена определенной буквой (А-Г) и представлена на диаграмме замкнутой областью. Каждая точка, расположенная в области, обозначает мощность и стоимость мотора, который можно произвести при помощи соответствущей технологии.
Например, при помощи технологии А можно произвести мотор мощностью 750 лошадиных сил, стоимость которого равна 8500 долларам, однако невозможно произвести мотор аналогичной мощности, стоимость которого равна 5000 долларов.

Примечание: области технологий А и Б пересекаются. То же самое верно в отношении областей технологий Б и В.



Обратите внимание: при ответе на каждый вопрос не следует принимать во внимание данные, приведенные в других вопросах.

Примеры вопросов и объяснения

1. Каков диапазон мощности моторов (в лошадиных силах), которые можно произвести как с использованием технологии А, так и с использованием технологии Б?

(1) 400-500
(2) 500-600
(3) 600-700
(4) ни один из вышеприведенных ответов не является верным

Для того чтобы ответить на вопрос, в котором требуется сделать вывод из диаграммы, вам следует сформулировать его „на языке диаграммы" и вслед за этим найти на ней нужную вам информацию. Данный вопрос касается моторов, которые можно произвести как при помощи технологии А, так и при помощи технологии Б. На диаграмме такие моторы представлены в виде зоны пересечения областей, изображающих две эти технологии. Эта зона обозначена на чертеже I темным цветом. Теперь следует найти диапазон мощности этих моторов. Границы темной зоны согласно горизонтальной оси соответствуют диапазону мощности моторов, которые можно произвести при помощи двух данных технологий. Как можно видеть на чертеже, эти границы располагаются между 600 и 700 лошадиными силами, то есть диапазон мощностей моторов, которые можно произвести при помощи как технологии А, так и технологии Б, равен от 600 до 700 лошадиных сил. Поэтому правильным ответом является (3).

Чертеж I

2. Какова минимальная стоимость мотора, обладающего мощностью 650 лошадиных сил?

(1) 1000 долларов
(2) 2000 долларов
(3) 1500 долларов
(4) 2500 долларов

При ответе на данный вопрос за исходную величину принимают мотор мощностью в 650 лошадиных сил. Значения мощности обозначены на диаграмме на горизонтальной оси. Поэтому на первом этапе следует найти на горизонтальной оси требуемое значение мощности мотора. Затем следует определить минимальную стоимость мотора данной мощности. Проведем вертикальную линию из точки горизонтальной оси, соответствующей мощности 650 лошадиных сил, вплоть до одной из областей (см. чертеж II). Эта точка соответствует наименьшей возможной стоимости мотора мощностью в 650 лошадиных сил. Самая низкая точка пересечения находится на периметре области, изображающей технологию Г, и соответствует стоимости в 2000 долларов, чему и равна самая низкая стоимость мотора данной мощности. Поэтому правильным ответом является (2).

Чертеж II

3. В одной из выпускающих моторы компаний было решено прекратить производство моторов при помощи технологии В.

Какова будет минимальная мощность (в лошадиных силах) мотора стоимостью 3000 долларов, который компания сможет произвести после реализации данного решения?

(1) 500
(2) 400
(3) 300
(4) невозможно произвести такой мотор

Поскольку в условиях вопроса сказано, что компания прекратит использовать технологию В, мы не будем рассматривать область данной технологии и примем во внимание только три другие области (закрашенные области на чертеже III). При ответе на данный вопрос за исходную величину принимают мотор стоимостью 3000 долларов. Стоимость моторов обозначена на диаграмме на вертикальной оси, поэтому сначала найдем точку на этой оси, которая соответствует стоимости 3000 долларов. По мере движения от нее вправо мощность растет, и если мы проведем горизонтальную линию от этой точки (см. чертеж III), то первая из точек ее пересечения с одной из областей, изображающих технологии, будет соответствовать самому **низкому** возможному значению мощности мотора стоимостью в 3000 долларов. Первая точка пересечения линии будет с областью, изображающей технологию Г. Эта точка располагается на вертикальной линии, соответствующей 500 лошадиным силам на горизонтальной оси, чему и равна теперь минимальная мощность мотора стоимостью 3000 долларов. Поэтому правильным ответом является (1).

Чертеж III

4. Некоторая фирма не имеет права на производство моторов, мощность которых превышает 550 лошадиных сил.

Какими технологиями может воспользоваться эта фирма для производства моторов?

(1) только В
(2) только Б и В
(3) только В и Г
(4) только Б, В и Г

Исходной величиной здесь является мотор мощностью 550 лошадиных сил. Найдем точку, соответствующую данной мощности, на горизонтальной оси и проведем из нее вертикальную линию вдоль всей высоты диаграммы (см. чертеж IV). Все моторы, представленные на диаграмме по правую сторону от данной линии, обладают мощностью более 550 лошадиных сил, а все моторы, представленные на диаграмме по левую сторону от нее, обладают мощностью менее 550 лошадиных сил. Фирма, упомянутая в данном вопросе, имеет право на производство моторов, мощность которых менее 550 лошадиных сил, поэтому она может использовать только те технологии, область (или часть области) которых располагается **по левую сторону** от линии (закрашенные области на чертеже IV). По левую сторону от проведенной нами линии находится вся область технологии В, часть области технологии Б и часть области технологии Г. Поэтому, для выпуска моторов мощностью менее 550 лошадиных сил фирма может воспользоваться технологиями Б, В и Г. Правильным ответом является (4).

Чертеж IV

Выводы из таблицы

Внимательно рассмотрите приведенную ниже таблицу и ответьте на следующие за ней вопросы.

В приведенной ниже таблице содержатся данные о 10 корпорациях из различных отраслей. Эти корпорации обозначены буквами от A до J.
Для каждой корпорации приведены: ее отрасль, данные об объеме продаж ее продукции, данные о ее прибыли в текущем году, стоимость ее имущества и число ее работников.
Например, корпорация E работает в отрасли электроники, в ней заняты 400 000 работников, и стоимость ее имущества составляет 90 миллионов долларов. Объем продаж корпорации E в этом году составил 70 миллиардов долларов (что на 9% больше объема ее продаж в прошлом году), а ее прибыль составила 6000 миллионов долларов (что на 60% больше ее прибыли в прошлом году).
Пример вычисления процента изменений: если объем продаж продукции некоторой корпорации в прошлом году составил 40 миллиардов долларов, а в этом году достиг 50 миллиардов долларов, то изменение объема продаж по сравнению с прошлым годом составило 25% $\left(\frac{50-40}{40}\cdot 100\right)$.

		Объем продаж		Прибыли			
Корпорации	Отрасль	Объем продаж (в миллиардах долларов)	Изменение по сравнению с прошлым годом	Прибыли (в миллионах долларов)	Изменение по сравнению с прошлым годом	Стоимость имущества (в миллионах долларов)	Число работников (в тысячах)
A	Автомобиле-строение	125	-1.5%	-2000	-150%	180	750
B	Нефть	110	25%	6500	0%	100	150
C	Нефть	105	22%	5000	40%	390	100
D	Автомобиле-строение	100	1.5%	900	-80%	180	350
E	Электроника	70	9%	6000	60%	90	400
F	Автомобиле-строение	65	7%	3000	15%	55	100
G	Металлургия	60	25%	1000	-20%	нет данных	400
H	Нефть	60	20%	3000	-15%	60	120
I	Нефть	55	15%	2000	7%	40	70
J	Электроника	50	6%	4500	10%	150	300

Обратите внимание: при ответе на каждый вопрос не следует принимать во внимание данные, приведенные в других вопросах.

Примеры вопросов и объяснения

1. У какой из автомобилестроительных корпораций **наименьшая** стоимость имущества?

(1) A
(2) D
(3) F
(4) A и D

Названия отраслей, к которым относятся данные корпорации, приведены во втором слева столбце. Можно видеть, что корпорации A, D и F - это единственные корпорации, относящиеся к отрасли автомобилестроения. Изучим значения стоимости имущества каждой из этих корпораций (второй столбец справа). Стоимость имущества корпорации A составляет 180 миллионов долларов. Такова также и стоимость имущества корпорации D. Стоимость имущества корпорации F равна 55 миллионам долларов. Таким образом, у корпорации F наименьшая стоимость имущества из корпораций, действующих в отрасли автомобилестроения. Правильным ответом является (3).

2. С учетом того, что прибыль делится поровну между всеми работниками корпорации, в какой из следующих корпораций прибыль на **одного** работника является наибольшей?

(1) H
(2) B
(3) C
(4) F

Данные прибыли на одного работника не содержатся в таблице, однако их можно вычислить на основании содержащихся в ней данных. В таблице приведены значения прибыли каждой из корпораций и число ее работников. Прибыль на одного работника какой-либо корпорации равна частному от деления общей прибыли данной корпорации на число ее работников.
Относительно всех корпораций общая прибыль указана в миллионах долларов, а число работников - в тысячах человек. Поэтому, чтобы провести сравнение между корпорациями, можно учитывать только численные значения в таблице и изобразить прибыль на одного работника следующим образом:

F	C	B	H
$\frac{3000}{100}$	$\frac{5000}{100}$	$\frac{6500}{150}$	$\frac{3000}{120}$

Можно, разумеется, вычислить прибыль на одного работника и увидеть, в какой корпорации полученное число является наибольшим, но можно сравнить эти выражения и не прибегая к вычислениям.
У корпораций F и H одна и та же общая прибыль (3000), однако в корпорации F она делится на меньшее число работников (100 < 120). Поэтому в корпорации F прибыль на одного работника больше.
Число работников в корпорации F и корпорации C одинаково (100), однако в корпорации C общая прибыль больше (5000 > 3000). Поэтому прибыль на одного работника в корпорации C также больше.

Корпорации B и C отличаются друг от друга по числу работников и по общей прибыли. В корпорации B число работников в 1.5 раза больше, чем в корпорации C (150 и 100). Если бы общая прибыль корпорации B также превышала общую прибыль корпорации C в 1.5 раза (то есть, если бы прибыль компании B составляла $5000 \cdot 1.5 = 7500$), то значения прибыли на одного работника в двух этих корпорациях были бы равны.
Однако общая прибыль корпорации B меньше этой величины ($6500 < 7500$), а значит прибыль на одного работника в корпорации B меньше, чем в корпорации C.
Итак, самая высокая прибыль на одного работника характеризует корпорацию C, и правильным ответом является (3).
Существует и другой способ сравнения между корпорациями B и C:
Прибыль на одного работника в корпорации C равна 50 $\left(\frac{5000}{100} = 50\right)$. В корпорации B прибыль на одного работника меньше 50 $\left(\frac{6500}{150} < 50\right)$, и поэтому прибыль на одного работника в корпорации C выше, чем в корпорации B.

3. Каков был объем продаж продукции корпорации G в прошлом году (в миллиардах долларов)?

(1) 48
(2) 50
(3) 64
(4) 76

Объем продаж в прошлом году не указан в таблице, однако его можно вычислить при помощи данных об объеме продаж в текущем году и проценте его изменения по сравнению с прошлым годом. Из таблицы следует, что в текущем году корпорация G продала свою продукцию на сумму в 60 миллиардов долларов и что объем продаж продукции увеличился на 25% по сравнению с прошлым годом. То есть, объем продаж в прошлом году равен числу, при прибавлении к которому 25% получают 60 миллиардов. Обозначим через x объем продаж в прошлом году и выразим эти данные при помощи следующего уравнения: $x + \frac{25}{100} \cdot x = 60$.

Упростим данное уравнение: $\frac{125}{100} \cdot x = 60$.

Выделим x: $x = 60 \cdot \frac{100}{125} = 60 \cdot \frac{4}{5} = 48$.

Таким образом, объем продаж продукции корпорации G в прошлом году составил 48 миллиардов долларов. Правильным ответом является (1).

4. Определим сумму расходов корпорации в определенном году следующим образом:

$$\left(\begin{array}{c}\text{Сумма расходов в}\\ \text{определенном году}\end{array}\right) = \left(\begin{array}{c}\text{Объем продаж в}\\ \text{том же году}\end{array}\right) - \left(\begin{array}{c}\text{Сумма прибылей}\\ \text{в том же году}\end{array}\right)$$

В какой отрасли работает корпорация, у которой самая высокая сумма расходов в этом году?

(1) Автомобилестроение
(2) Нефть
(3) Электроника
(4) Металлургия

Для того чтобы вычислить сумму расходов корпорации в этом году, следует вычесть сумму прибылей из объема продаж. В таблице объем продаж дан в миллиардах долларов, а сумма прибылей дана в миллионах долларов. Для того чтобы вычесть одну величину из другой, необходимо перевести их в одни и те же единицы. Если умножить указанный в таблице объем продаж на 1000, мы получим значение объема продаж в миллионах долларов.
Так, например, объем продаж корпорации C в миллионах долларов составляет 105 000. Сумма прибылей данной корпорации равна 5000 миллионов долларов, и таким образом сумма ее расходов равна 100 000 миллионов долларов. Аналогичным образом можно вычислить сумму расходов всех корпораций, указанных в таблице, и найти корпорацию с самой высокой суммой расходов.
Однако можно сэкономить время, которое потребуется для производства этих вычислений: из формулы суммы расходов следует, что чем выше объем продаж или чем ниже сумма прибылей, тем выше сумма расходов. Поэтому имеет смысл вначале проверить корпорации, у которых самый высокий объем продаж или самая низкая сумма прибылей. Можно увидеть из таблицы, что корпорация A является корпорацией с самым высоким объемом продаж и с самой низкой суммой прибыли (она единственная из корпораций, у которой отрицательная сумма прибыли, то есть она, по сути, терпит убытки). Таким образом, у нее вне всякого сомнения самая высокая сумма расходов. Отрасль, к которой относится корпорация A, это автомобилестроение. Поэтому правильным ответом является (1).