

חשיבה כמותית

בתחום זה נבדקות היכולת להשתמש במספרים ובמונחים מתמטיים כדי לפתור בעיות כמותיות, והיכולת לנתח נתונים המוצגים בצורות שונות, כמו תרשימים וטבלאות. הידע המתמטי הנדרש הוא ברמה בסיסית (החומר הנלמד עד כיתות ט'-י' ברוב בתי הספר בארץ).

כל השאלות בתחום הן במבנה של שאלות ברורה: לאחר כל שאלה מוצעות ארבע תשובות, ורק אחת מהן היא תשובה נכונה לשאלה.

בפרק חשיבה כמותית מופיעות שאלות משני סוגים: שאלות ובעיות, ושאלות הסקה מתרשים או מטבלה.

שאלות ובעיות עוסקות במגוון נושאים מתחומי האלגברה והגאומטריה. כמה מהשאלות מוצגות במונחים מתמטיים, וכמה הן שאלות מילוליות ובהן יש לתרגם תחילה את הבעיה למונחים מתמטיים.

שאלות הסקה מתרשים או מטבלה נוגעות למידע המוצג בתרשים או בטבלה. בתרשים מוצגים נתונים בצורה גרפית: בדיאגרמת עמודות, בגרף, בדיאגרמת פיזור וכדומה. בטבלה מוצגים נתונים המסודרים בעמודות ובשורות.

בדרך כלל השאלות מכל אחד מהסוגים מסודרות בסדר קושי עולה: בתחילה השאלות קלות והזמן הדרוש לפתרונן קצר יחסית, ובהדרגה הן נעשות קשות יותר ומצריכות זמן רב יותר.

הסרטטים הנלווים לכמה מהשאלות אינם מסורטטים בהכרח על פי קנה מידה: אין להסיק ממראה הסרטוט בלבד על אורך קטע, על גודל זווית וכו'. עם זאת, קו הנראה ישר, אפשר להניח שהוא אכן ישר.

בתחילת הפרק ניתן "דף נוסחאות" ובו הוראות, הערות ונוסחאות שונות. אפשר להיעזר בו במהלך הבחינה. דף הנוסחאות ניתן גם בחוברת זו (בעמוד הבא) ובפרקי החשיבה הכמותית שבבחינה להתנסות. רצוי להכיר את תוכנו ולהתמצא בו לפני הבחינה.

בעמ' 41-62 יש חזרה על מושגים בסיסיים במתמטיקה המשקפים במידה רבה את החומר שעליו מתבססות השאלות בתחום החשיבה הכמותית. עם זאת, בבחינה עצמה עשויות להיות שאלות שכדי לפתור אותן יש צורך במושגים ובמשפטים מתמטיים נוספים, שאינם מופיעים בעמודים האלה.

בעמ' 63-77 יש דוגמאות לשאלות מסוגים שונים, ולכל שאלה מצורפים פתרון והסבר מפורט.

דף נוסחאות

בפרק זה 20 שאלות.
הזמן המוקצב הוא 20 דקות.

בפרק זה מופיעות שאלות ובעיות של חשיבה כמותית. לכל שאלה מוצעות ארבע תשובות. עליכם לבחור את התשובה הנכונה ולסמן את מספרה במקום המתאים בגיליון התשובות.

הערות כלליות

- הסרטוטים המצורפים לכמה מהשאלות נועדו לסייע בפתרון, אך הם אינם מסורטטים בהכרח על פי קנה מידה. אין להסיק מסרטוט בלבד על אורך קטעים, על גודל זוויות, ועל כיוצא בהם.
- קו הנראה ישר בסרטוט, אפשר להניח שהוא אכן ישר.
- כאשר מופיע בשאלה מונח גאומטרי (צלע, רדיוס, שטח, נפח וכו') כנתון, הכוונה היא למונח שערכו גדול מאפס, אלא אם כן מצוין אחרת.
- כאשר בשאלה כתוב \sqrt{a} ($0 < a$), הכוונה היא לשורש החיובי של a .
- 0 אינו מספר חיובי ואינו מספר שלילי.
- 0 הוא מספר זוגי.
- 1 אינו מספר ראשוני.

נוסחאות

- 1. אחוזים:** $a\%$ מ- x הם $\frac{a}{100} \cdot x$
- 2. חזקות:** לכל מספר a שונה מאפס ולכל n ו- m שלמים -
 - א. $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$
 - ב. $a^{m+n} = a^m \cdot a^n$
 - ג. $a^{\frac{n}{m}} = (\sqrt[m]{a})^n$ ($0 < a, 0 < m$)
 - ד. $a^{n \cdot m} = (a^n)^m$
- 3. כפל מקוצר:**

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$$

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$
- 4. בעיות דרך:** $\frac{\text{דרך}}{\text{זמן}} = \text{מהירות}$
- 5. בעיות הספק:** $\frac{\text{כמות עבודה}}{\text{זמן}} = \text{הספק}$
- 6. עצרת:** $n! = n(n-1)(n-2) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1$
- 7. פרופורציה:** אם $AD \parallel BE \parallel CF$ אז $\frac{AB}{AC} = \frac{DE}{DF}$ וגם $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF}$
- 8. משולש:**
 - א. שטח משולש שאורך בסיסו a ואורך הגובה לבסיס זה h , הוא $\frac{a \cdot h}{2}$
 - ב. משפט פיתגורס: במשולש ישר זווית ABC כבסרטוט מתקיים $AC^2 = AB^2 + BC^2$
 - ג. במשולש ישר זווית שזוויותיו $30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$ אורך הניצב שמול הזווית 30° שווה לחצי אורך היתר
- 9. שטח מלבן** שאורכו a ורוחבו b הוא $a \cdot b$
- 10. שטח טרפז** שאורך בסיסו האחד a , אורך בסיסו האחר b וגובהו h , הוא $\frac{(a+b) \cdot h}{2}$
- 11. זוויות פנימיות במצולע בעל n צלעות:**
 - א. סכום הזוויות הוא $(180n - 360)$ מעלות,
 - ב. אם המצולע משוכלל, גודל כל זווית פנימית הוא $(180 - \frac{360}{n})$ מעלות
- 12. מעגל, עיגול:**
 - א. שטח מעגל שרדיוסו r הוא πr^2 ($\pi = 3.14\dots$)
 - ב. היקף המעגל הוא $2\pi r$
 - ג. שטח גזרת מעגל בעלת זווית ראש x° הוא $\pi r^2 \cdot \frac{x}{360}$
- 13. תיבה, קובייה:**
 - א. נפח תיבה שאורכה a , רוחבה b וגובהה c הוא $a \cdot b \cdot c$
 - ב. שטח הפנים של התיבה הוא $2ab + 2bc + 2ac$
 - ג. בקובייה מתקיים $a = b = c$
- 14. גליל:**
 - א. שטח המעטפת של גליל שרדיוסו r וגובהו h , הוא $2\pi r \cdot h$
 - ב. שטח הפנים של הגליל הוא $2\pi r^2 + 2\pi r \cdot h = 2\pi r(r + h)$
 - ג. נפח הגליל הוא $\pi r^2 \cdot h$
- 15. נפח חרוט** שרדיוס בסיסו r וגובהו h , הוא $\frac{\pi r^2 \cdot h}{3}$
- 16. נפח פירמידה** ששטח בסיסה S וגובהה h , הוא $\frac{S \cdot h}{3}$

חזרה על מושגים בסיסיים במתמטיקה

סימנים

משמעותו	הסימן
הישרים a ו-b מקבילים זה לזה	$a \parallel b$
הישרים a ו-b מאונכים זה לזה	$a \perp b$
זווית של 90° , זווית ישרה	\square
הזווית הכלואה בין הקטע AB לקטע BC	$\sphericalangle ABC$
x שווה ל-y	$x = y$
x שונה מ-y	$x \neq y$
x קטן מ-y	$x < y$
x קטן מ-y או שווה לו	$x \leq y$
גם x וגם y גדולים מ-a	$a < x, y$
x שווה ל-a או x שווה ל-(-a)	$x = \pm a$
הערך המוחלט של x	$ x $
היחס בין x ל-y	$x : y$

סוגי מספרים

מספר שלם: מספר המורכב מיחידות שלמות. מספר שלם יכול להיות שלילי, חיובי או 0.

למשל: $\dots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \dots$
שימו לב: 0 הוא מספר שלם שאינו חיובי ואינו שלילי.

מספר לא שלם: מספר שאי-אפשר לבטאו ביחידות שלמות.

למשל: $\sqrt{2}, -1\frac{1}{2}, 2\frac{1}{2}, 1.37$

מספרים עוקבים: מספרים שלמים הבאים זה אחר זה בהפרשים של 1. למשל, 4 ו-5 הם מספרים עוקבים.

2, 3 ו-4 הם מספרים עוקבים, וגם (-3) ו-(-2) הם מספרים עוקבים.
באופן כללי, אם n הוא מספר שלם, אז n ו-(n + 1) הם מספרים עוקבים.
לעתים נוהגים לומר: (n + 1) הוא העוקב של n.

מספר זוגי: מספר שלם שאם מחלקים אותו ב-2 מקבלים מספר שלם (כלומר, הוא מתחלק ב-2 ללא שארית).

באופן כללי, אם n הוא מספר שלם, אז 2n הוא מספר זוגי.
שימו לב: 0 הוא מספר זוגי.

מספר אי-זוגי: מספר שלם שאם מחלקים אותו ב-2 מקבלים מספר לא שלם (כלומר, כשמחלקים אותו ב-2

מקבלים שארית 1).

באופן כללי, אם n הוא מספר שלם, אז 2n + 1 הוא מספר אי-זוגי.

מספר ראשוני: מספר שלם וחיובי המתחלק ללא שארית בשני מספרים בלבד: בעצמו וב-1.

למשל: 13 הוא מספר ראשוני, מכיוון שהוא מתחלק ללא שארית רק ב-13 וב-1.
שימו לב: 1 אינו מוגדר מספר ראשוני.

מספרים נגדיים:

זוג מספרים שסכומם שווה לאפס.
 למשל: 4 ו-(-4) הם מספרים נגדיים.
 ובאופן כללי, a ו-(-a) הם מספרים נגדיים ($a + (-a) = 0$), או במילים אחרות, (-a) הוא המספר הנגדי ל-a.

מספרים הופכיים:

זוג מספרים שמכפלתם שווה ל-1.
 למשל: 3 ו- $\frac{1}{3}$ הם מספרים הופכיים, וכך גם $\frac{2}{7}$ ו- $\frac{7}{2}$.
 ובאופן כללי, עבור $a, b \neq 0$:
 a ו- $\frac{1}{a}$ הם מספרים הופכיים ($a \cdot \frac{1}{a} = 1$), או במילים אחרות, $\frac{1}{a}$ הוא ההופכי של a.
 $\frac{a}{b}$ ו- $\frac{b}{a}$ הם מספרים הופכיים ($\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = 1$), או במילים אחרות, $\frac{b}{a}$ הוא ההופכי של $\frac{a}{b}$.

ערך מוחלט:

אם $0 < x$ אז $|x| = x$,
 אם $x < 0$ אז $|x| = -x$,
 $|0| = 0$.

פעולות חשבוניות במספרים זוגיים ואי-זוגיים (קראו מימין לשמאל)

זוגי	=	זוגי	+	זוגי
זוגי	=	אי-זוגי	+	אי-זוגי
אי-זוגי	=	זוגי	+	אי-זוגי
זוגי	=	זוגי	-	זוגי
זוגי	=	אי-זוגי	-	אי-זוגי
אי-זוגי	=	אי-זוגי	-	זוגי
אי-זוגי	=	זוגי	-	אי-זוגי
זוגי	=	זוגי	×	זוגי
אי-זוגי	=	אי-זוגי	×	אי-זוגי
זוגי	=	זוגי	×	אי-זוגי

אין כללים דומים עבור פעולות חילוק. למשל, מנה של שני מספרים זוגיים יכולה להיות אי-זוגית ($\frac{6}{2} = 3$), זוגית ($\frac{4}{2} = 2$) או מספר לא שלם ($\frac{6}{4} = 1\frac{1}{2}$).

גורמים (מחלקים) וכפולות

גורם (מחלק) של מספר שלם וחיובי x הוא כל מספר שלם וחיובי y ש- x מתחלק בו ללא שארית. למשל, הגורמים של 24 הם: 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12 ו-24.

גורם משותף של x ו- y הוא מספר שהוא גם גורם של x וגם גורם של y . למשל, 6 הוא גורם משותף של 24 ושל 30.

גורם ראשוני הוא גורם שהוא גם מספר ראשוני. למשל, הגורמים הראשוניים של 24 הם 2 ו-3. כל מספר שלם וחיובי (הגדול מ-1) אפשר לכתוב כמכפלה של גורמים ראשוניים. למשל, $24 = 3 \cdot 2^3 = 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$.

כפולה של מספר שלם x היא כל מספר שלם המתחלק ב- x ללא שארית. למשל, 16, 32 ו-88 הם כפולות של 8.

כאשר כתוב בשאלה "מתחלק" הכוונה היא ל"מתחלק ללא שארית".

פעולות חשבוניות בשברים

צמצום

כאשר למונה ולמכנה של שבר יש גורם משותף, אפשר לחלק כל אחד מהם בגורם המשותף ולקבל שבר השווה לשבר המקורי, עם מונה ומכנה קטנים יותר. למשל, אם נחלק את המונה והמכנה של $\frac{16}{12}$ ב-4 נקבל $\frac{4}{3}$ ($\frac{16}{12} = \frac{4}{3}$).

כפל

כדי לכפול שני שברים יש לכפול את המונים זה בזה ואת המכנים זה בזה.

$$\text{למשל: } \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{7} = \frac{2 \cdot 5}{3 \cdot 7} = \frac{10}{21}$$

חילוק

כדי לחלק מספר בשבר, יש לכפול את המספר בשבר ההופכי לשבר המחלק.

$$\text{למשל: } \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{8} = \frac{2}{5} \cdot \frac{8}{3} = \frac{2 \cdot 8}{5 \cdot 3} = \frac{16}{15}$$

כדי לכפול או לחלק מספר שלם בשבר, אפשר להתייחס למספר השלם כאל שבר שהמכנה שלו הוא 1. למשל, $2 = \frac{2}{1}$.

חיבור וחסור

כדי לחבר או לחסר שברים יש להפוך אותם לשברים בעלי מכנה משותף. **מכנה משותף** הוא מספר שאפשר לחלקו במכנה של כל אחד מהשברים ללא שארית. לאחר שמוצאים מספר המתאים לשמש מכנה משותף, יש "לתרגם" כל אחד מהשברים לשבר בעל מכנה השווה למכנה המשותף. לשם כך יש לכפול בכל שבר את המונה ואת המכנה באותו מספר שלם, וכך במכנה יתקבל המספר שנבחר לשמש מכנה משותף. מכיוון שהמונה והמכנה מוכפלים באותו מספר, למעשה השבר מוכפל ב-1, וערכו לא משתנה. לאחר "תרגום" השברים לשברים בעלי מכנה משותף, יש לחבר או לחסר את המונים החדשים שהתקבלו, ואם אפשר – לצמצם את התוצאה.

דוגמה

$$\frac{3}{4} + \frac{1}{6} + \frac{5}{8} = ?$$

מכנה משותף אפשרי הוא 24, שכן הוא מתחלק במכנה של כל אחד מהשברים ללא שארית:

$$\frac{24}{4} = 6, \quad \frac{24}{6} = 4, \quad \frac{24}{8} = 3$$

"נתרגם" כל אחד מהשברים לשבר בעל מכנה משותף זה:

$$\frac{3}{4} = \frac{18}{24}, \quad \frac{1}{6} = \frac{4}{24}, \quad \frac{5}{8} = \frac{15}{24}$$

ונקבל:

$$\frac{3}{4} + \frac{1}{6} + \frac{5}{8} = \frac{18}{24} + \frac{4}{24} + \frac{15}{24} = \frac{18+4+15}{24} = \frac{37}{24}$$

אחוזים

אחוזים הם דרך לסמן מאיות: $a\%$ מ- x הם a מאיות מ- x , כלומר $x \cdot \frac{a}{100}$. בשאלות שבהן מופיעים אחוזים, יש לתרגם אותם למאיות ולפתור כמו בתרגילי שברים רגילים.

דוגמה

כמה הם 60 אחוזים מ-80?

במקום 60 אחוזים נציב 60 מאיות, ונפתור כמו מכפלה רגילה של שברים: $\frac{60}{100} \cdot 80 = \frac{60 \cdot 80}{100} = 6 \cdot 8 = 48$. כלומר, 60% מ-80 הם 48.

בשאלות הנוגעות לשינוי באחוזים מדובר באחוז מתוך הערך ההתחלתי, אלא אם כן נאמר במפורש אחרת.

דוגמה

מחירו של פריט שעלה 80 שקלים הועלה ב-25%. מה מחירו החדש?

מכיוון שהוסיפו 25% על המחיר הישן, המחיר החדש הוא 125% מהמחיר הישן (100% + 25%), ולכן יש למצוא כמה הם 125% מ-80.

נציב מאיות במקום אחוזים, ונפתור: $\frac{125}{100} \cdot 80 = 100$. כלומר, המחיר החדש הוא 100 שקלים.

דוגמה

מחירו של פריט ירד מ-15 ל-12 שקלים. בכמה אחוזים ירד המחיר?

בדוגמה זו נתון השינוי במחירו של פריט, ויש לחשב את אחוז השינוי.

השינוי במחיר הוא 3 שקלים מתוך 15 שקלים. יש לחשב כמה אחוזים מ-15 הם 3.

נתרגם את השאלה לביטוי מתמטי: $\frac{a}{100} \cdot 15 = 3$, ונפתור את המשוואה: $a = \frac{3 \cdot 100}{15} = 20$.

כלומר, המחיר ירד ב-20%.

יחס

היחס בין x ל-y נרשם כך: $x : y$.

שימו לב: בניסוח מילולי יחס נרשם מימין לשמאל, ובניסוח מתמטי (במספרים) – משמאל לימין.

דוגמה

היחס בין מספר זוגות הגרביים של איתי ובין מספר החולצות שלו הוא 2 : 3. כלומר, על כל 3 זוגות גרביים יש לאיתי 2 חולצות. בניסוח אחר, מספר זוגות הגרביים של איתי גדול פי $\frac{3}{2}$ ממספר החולצות שלו.

ממוצע

ממוצע חשבוני של קבוצת ערכים הוא מספר המתקבל מחלוקת סכום הערכים במספר הערכים. כאשר כתוב בשאלות "ממוצע" בלבד הכוונה היא לממוצע חשבוני.

למשל, הממוצע של קבוצת הערכים 1, 3, 5, 10 ו-21 הוא 8: $\frac{1+3+5+10+21}{5} = \frac{40}{5} = 8$.

אם נתון הממוצע של קבוצת ערכים, אפשר לחשב את סכומם על ידי הכפלת הממוצע במספר הערכים.

דוגמה

דני קנה 5 פריטים שמחירם הממוצע 10 שקלים. כמה שילם דני תמורת כל הפריטים? בשאלה זו יש למצוא את הסכום על סמך הממוצע, לכן נכפיל את הממוצע במספר הפריטים: $10 \cdot 5 = 50$, כלומר, דני שילם סך הכול 50 שקלים תמורת כל הפריטים שקנה.

ממוצע משוקלל הוא ממוצע שבו מובא בחשבון משקלו היחסי של כל אחד מהערכים בקבוצה.

דוגמה

בבחינת אמצע הקורס היה ציונו של יוסי 75, ובבחינת הגמר היה ציונו 90. אם משקלה של בחינת הגמר גדול פי 2 ממשקלה של בחינת אמצע הקורס, מה יהיה ציונו הסופי של יוסי בקורס? קבוצת הערכים היוצרים את ציונו הסופי של יוסי בקורס היא 75 ו-90, אך לכל אחד מהם משקל אחר. לציון 75 יש משקל 1, ולציון 90 יש משקל 2. כדי לחשב את הממוצע המשוקלל יש להכפיל כל ציון במשקל שניתן לו, ולחלק בסכום המשקלים: $\frac{1 \cdot 75 + 2 \cdot 90}{1+2} = 85$. כלומר הציון של יוסי בקורס הוא 85. חישוב זה זהה לחישוב ממוצע חשבוני רגיל של שלושה מספרים: 75, 90 ו-90.

חזקות ושורשים

העלאה של מספר בחזקת n (n שלם וחיובי) היא הכפלתו בעצמו n פעמים: $a^n = \underbrace{a \cdot \dots \cdot a}_n$. למשל, $(-3)^3 = (-3)(-3)(-3) = -27$.

a^n נקראת "חזקה", n נקרא "מעריך החזקה", ו-a נקרא "בסיס החזקה".

כל מספר שונה מאפס המועלה בחזקת 0 שווה ל-1: $a^0 = 1$ לכל $a \neq 0$.

חזקה בעלת מעריך שלילי מוגדרת כחזקה המתקבלת מהעלאת המספר ההופכי לבסיס, בחזקת המספר הנגדי למעריך:

$$a^{-n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n \quad \text{למשל, } 2^{-3} = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$$

שורש מסדר n של מספר חיובי a, המסומן $\sqrt[n]{a}$, הוא מספר חיובי b שאם נעלה אותו בחזקת n, נקבל את a:

$$\text{אם } b^n = a \text{ אז } \sqrt[n]{a} = b \quad \text{למשל, } \sqrt[4]{81} = 3 \text{ כי } 3^4 = 81$$

כאשר לא מצוין סדר השורש, הכוונה היא לשורש מסדר 2, למשל: $\sqrt{81} = \sqrt[2]{81} = 9$. שורש מסדר 2 נקרא גם שורש ריבועי. אפשר גם לבטא שורש כחזקה שבה המעריך הוא שבר. שבר זה הוא ההופכי לסדר השורש: $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$ ($0 < a$).

שימו לב: כאשר בשאלה כתוב \sqrt{a} ($0 < a$) הכוונה היא לשורש החיובי של a .

חוקים בסיסיים לפעולות בחזקות (עבור כל n, m):

כפל: כדי לכפול חזקות בעלות אותו בסיס, יש לחבר את מעריכי החזקות: $a^m \cdot a^n = a^{(m+n)}$.

חילוק: כדי לחלק חזקות בעלות אותו בסיס, יש לחסר את מעריך החזקה שבמכנה ממעריך החזקה שבמונה:

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{(m-n)}$$

שימו לב: **כאשר בסיסי החזקות אינם זהים, אי-אפשר לחבר או לחסר את המעריכים.**

העלאה בחזקה: כדי להעלות חזקה בחזקה יש להכפיל את המעריכים זה בזה: $(a^m)^n = a^{(m \cdot n)}$.

העלאה בחזקה של מכפלה או של מנה: $(a \cdot b)^m = a^m \cdot b^m$, $\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$.

מכיוון שאפשר לבטא שורשים גם כחזקות, אפשר להפעיל את חוקי החזקות גם על שורשים. למשל, כדי לחשב את המכפלה $\sqrt[m]{a} \cdot \sqrt[n]{a}$ ($0 < a$), יש לבטא תחילה את השורשים כחזקות: $\sqrt[m]{a} \cdot \sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{m}} \cdot a^{\frac{1}{n}}$.

ואחר כך לפעול כמו במכפלה של חזקות, כלומר, לחבר את המעריכים: $a^{\frac{1}{m}} \cdot a^{\frac{1}{n}} = a^{\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{n}\right)}$.

אי-שוויונות בחזקות:

אם $0 < b < a$	וגם $0 < n$	אז $b^n < a^n$
אם $0 < b < a$	וגם $n < 0$	אז $a^n < b^n$
אם $1 < a$	וגם $m < n$	אז $a^m < a^n$
אם $0 < a < 1$	וגם $m < n$	אז $a^n < a^m$

נוסחאות כפל מקוצר

כדי לכפול שני ביטויים הנתונים בסוגריים, שכל אחד מהם הוא סכום של מחוברים, יש לכפול כל אחד מאיברי הביטוי הראשון בכל אחד מאיברי הביטוי השני ואחר-כך לחבר את המכפלות.

$$\text{למשל, } (a + b) \cdot (c + d) = ac + ad + bc + bd.$$

לפי נוסחה כללית זו אפשר לחשב כל מכפלה של שני ביטויים, אך כדי לחסוך זמן ייתכן שתמצאו לזכור בעל-פה כמה נוסחאות נפוצות:

$$(a + b)^2 = (a + b) \cdot (a + b) = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a - b)^2 = (a - b) \cdot (a - b) = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a - b) \cdot (a + b) = a^2 - b^2$$

קומבינטוריקה

ניסוי רב-שלבי

דוגמה

מטילים קובייה ולאחר מכן מטילים מטבע. מה מספר התוצאות האפשריות בניסוי זה?
 בניסוי זה שני שלבים: שלב הטלת הקובייה ושלב הטלת המטבע.
 מספר התוצאות האפשריות בהטלת קובייה הוא 6 ומספר התוצאות האפשריות בהטלת מטבע הוא 2.
 מספר התוצאות האפשריות בניסוי כולו הוא $6 \cdot 2 = 12$.
 אחת מ-12 התוצאות האפשריות היא: המספר 3 בקובייה והצד "עץ" במטבע.
 למעשה, אין זה משנה אם מטילים את הקובייה ורק אחר כך מטילים את המטבע, או אם מטילים את המטבע ואחר כך את הקובייה, או שמטילים את שניהם יחד. בכל מקרה, יש 12 תוצאות אפשריות.

להלן נתייחס לניסוי רב-שלבי שבו נתונה קבוצה של n עצמים, ויש לבחור ממנה עצם באקראי r פעמים. כל בחירה של עצם מהקבוצה היא שלב בניסוי, וסך הכול יש בניסוי זה r שלבים. מספר התוצאות האפשריות בכל אחד מ- r השלבים תלוי באופן בחירת העצמים. מספר התוצאות האפשריות בניסוי כולו הוא מכפלה של מספר התוצאות האפשריות שמתקבלות ב- r השלבים. כל תוצאה אפשרית בניסוי נקראת **מדגם**.

מדגמים סדורים עם החזרה

אופן בחירת העצמים: עצם שנבחר **מוחזר** לקבוצה מיד לאחר שנבחר, ויש חשיבות לסדר שבו נבחרו העצמים. מספר התוצאות האפשריות: בכל שלב מספר התוצאות האפשריות הוא n , לכן מספר התוצאות האפשריות בכל r השלבים, כלומר בניסוי כולו, הוא $n^r = n \cdot n \cdot \dots \cdot n$. שימו לב: באופן בחירה זה, עצם יכול להיבחר יותר מפעם אחת.

מספר המדגמים הסדורים עם החזרה הוא n^r

דוגמה

בקופסה תשעה כדורים הממוספרים מ-1 עד 9. מוציאים באקראי כדור מהקופסה, מחזירים אותו, וחוזרים על פעולה זו עוד פעמיים. רושמים (משמאל לימין) את מספרי הכדורים שהוצאו, לפי סדר הוצאתם, כך שמתקבל מספר תלת-ספרתי. כמה מספרים תלת-ספרתיים שונים יכולים להתקבל באופן זה?
 בניסוי זה יש חשיבות לסדר: למשל, אם מספרי הכדורים שהוצאו הם 3, 8 ו-3 בסדר זה, מתקבל המספר 383, אך אם הם הוצאו בסדר 3, 3 ו-8, מתקבל המספר 338, ואלה שני מספרים שונים.
 מספר השלבים בניסוי הוא 3 ובכל שלב מספר התוצאות האפשריות הוא 9, ולכן מספר התוצאות האפשריות בניסוי כולו הוא $9^3 = 729$, כלומר יכולים להתקבל 729 מספרים תלת-ספרתיים שונים.

מדגמים סדורים ללא החזרה

אופן בחירת העצמים: עצם שנבחר **אינו מוחזר** לקבוצה לאחר שנבחר, ויש חשיבות לסדר שבו נבחרו העצמים. מספר התוצאות האפשריות: מספר התוצאות האפשריות בשלב הראשון הוא n , מספר התוצאות האפשריות בשלב השני הוא $n-1$ (שכן העצם שנבחר בשלב הראשון לא הוחזר, ונותרו רק $n-1$ עצמים לבחור מתוכם) וכך הלאה עד השלב האחרון, שלב מספר r , שבו מספר התוצאות האפשריות הוא $n-r+1$. לכן מספר התוצאות האפשריות בניסוי כולו הוא $n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-r+1)$.

מספר המדגמים הסדורים ללא החזרה הוא $n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-r+1)$

דוגמה

בקופסה תשעה כדורים הממוספרים מ-1 עד 9. מוציאים מהקופסה באקראי 3 כדורים בזה אחר זה, מבלי להחזיר כדור שכבר הוצא. רושמים (משמאל לימין) את מספרי הכדורים שהוצאו, לפי סדר הוצאתם, כך שמתקבל מספר תלת-ספרתי. כמה מספרים תלת-ספרתיים שונים יכולים להתקבל באופן זה?
 גם בניסוי זה יש חשיבות לסדר שבו הוצאו הכדורים, אך שלא כמו בדוגמה הקודמת, בניסוי זה אין מחזירים לקופסה כדור שהוצא, ולכן מספר התוצאות האפשריות בשלב הראשון הוא 9, בשלב השני 8, ובשלב השלישי 7. מספר התוצאות האפשריות בניסוי כולו הוא $9 \cdot 8 \cdot 7 = 504$, כלומר יכולים להתקבל 504 מספרים תלת-ספרתיים שונים.

סידורים פנימיים

כאשר יוצרים מדגם סדור ללא החזרה מכל n העצמים שבקבוצה (כלומר, אם $r = n$) כל תוצאה אפשרית מתארת סידור פנימי של העצמים: איזה עצם הוא הראשון, איזה עצם הוא השני וכן הלאה. השאלה היא כמה סידורים פנימיים אפשריים?

נציב $n = r$ בנוסחה למציאת מספר המדגמים הסדורים ללא החזרה ונקבל: $1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (n-1) \cdot n$. מספר זה מכונה "ח' עצרת" ומסומן $n!$.

מספר הסידורים הפנימיים האפשריים של n עצמים הוא $n!$

דוגמה

סבתא, אימא ובת רוצות להסתדר בשורה לצורך צילום. בכמה דרכים שונות הן יכולות לעשות זאת? ניתן לחשוב על העומדת מימין כראשונה, על האמצעית - כשנייה ועל העומדת משמאל - כשלישית, ואז השאלה היא כמה סידורים פנימיים של הסבתא, האימא והבת אפשריים. הסבתא, האימא והבת מהוות קבוצה של 3 עצמים, ולכן מספר הסידורים הפנימיים שלהן הוא $3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$. נפרט את הסידורים האפשריים: סבתא-אימא-בת, סבתא-בת-אימא, אימא-סבתא-בת, אימא-בת-סבתא, בת-סבתא-אימא, בת-אימא-סבתא.

מדגמים לא סדורים

אופן בחירת העצמים: עצם שנבחר **אינו מוחזר** לקבוצה לאחר שנבחר, **ואין חשיבות לסדר** שבו נבחרו העצמים. כשאין חשיבות לסדר, כל המדגמים שיש בהם אותם r עצמים (רק סדר הבחירה שלהם שונה בכל מדגם) נחשבים לאותה תוצאה. למעשה, מספר המדגמים האלה הוא מספר הסידורים הפנימיים של r העצמים, כלומר $r!$. כדי לחשב את מספר התוצאות האפשריות במדגמים לא סדורים, מחשבים את מספר התוצאות האפשריות כאילו יש חשיבות לסדר ומחלקים אותו במספר הסידורים הפנימיים של r העצמים.

$$\frac{n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-r+1)}{r!} = \frac{\text{מספר המדגמים הסדורים ללא החזרה}}{\text{מספר הסידורים הפנימיים במדגם}} = \text{מספר המדגמים הלא סדורים}$$

דוגמה

בקופסה תשעה כדורים הממוספרים מ-1 עד 9. מוציאים מהקופסה באקראי 3 כדורים בזה אחר זה, מבלי להחזיר כדור שכבר הוצא, ומכניסים את הכדורים שהוצאו לכובע. כמה אפשרויות שונות יש להרכב הכדורים בכובע? בשאלה זו חשוב הרכב הכדורים בכובע ולא הסדר שבו הוצאו מהקופסה. למשל, אם הכדורים הוצאו בסדר 5, 1 ו-4, ההרכב בכובע הוא הכדורים 1, 4 ו-5, וזה יהיה הרכב הכדורים בכובע גם אם הם הוצאו בסדר 4, 5 ו-1 או בכל אחד מ- $3!$ הסדרים האפשריים: 1-4-5, 1-5-4, 4-1-5, 4-5-1, 5-1-4, 5-4-1 (למעשה, אין כל חשיבות להוצאת הכדורים בזה אחר זה, והיה אפשר להוציאם בבת אחת מבלי שהדבר ישפיע על התוצאה). לכן, מספר ההרכבים האפשריים הוא $\frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{3!}$, כלומר יש 84 אפשרויות שונות להרכב הכדורים בכובע.

הסתברות

תורת ההסתברות היא מודל מתמטי לתופעות שהתרחשותן אינה ודאית, או לניסויים שתוצאותיהם אינן ודאיות. כל תוצאה אפשרית בניסוי נקראת "מאורע פשוט", ואוסף של תוצאות נקרא "מאורע". לשם קיצור, נשתמש בהמשך במונח "מאורע" גם לציון "מאורע פשוט". משייכים לכל מאורע מספר בין 0 ל-1, שמשקף את ההסתברות (הסיכוי, מידת הסבירות) שהמאורע יתרחש. ככל שההסתברות גדולה יותר, כך גדלים סיכויי ההתרחשות של המאורע. כאשר התרחשותו של מאורע היא ודאית, ההסתברות להתרחשותו היא 1, וכאשר המאורע לא ייתכן בשום מקרה, ההסתברות להתרחשותו היא 0. סכום ההסתברויות של כל המאורעות הפשוטים בניסוי הוא 1. כאשר לכל אחת מ-n התוצאות האפשריות של ניסוי יש אותו סיכוי להתרחש, נאמר שהתוצאות הן שוות-הסתברות. במקרה זה ההסתברות של כל תוצאה היא $\frac{1}{n}$.

דוגמה

הניסוי: הטלת מטבע.
 התוצאות האפשריות: שני צדי המטבע. מסמנים אותם: 1 או 0 (או: עץ או פלי, עץ או מספר).
 אם **המטבע הוגן**, שתי התוצאות הן שוות-הסתברות: ההסתברות שהמטבע ייפול על "1" שווה להסתברות שיפול על "0", ולכן ההסתברות של כל תוצאה אפשרית היא $\frac{1}{2}$.

דוגמה

הניסוי: הטלת קובייה.
 התוצאות האפשריות: המספרים 1, 2, 3, 4, 5 ו-6, הרשומים על פאות הקובייה.
 אם **הקובייה הוגנת**, ההסתברות של כל אחת מהתוצאות האפשריות היא $\frac{1}{6}$.

כאשר כל התוצאות האפשריות הן שוות הסתברות,

הסתברות התרחשותו של מאורע היא: $\frac{\text{מספר התוצאות במאורע (המסוים הזה)}}{\text{סך כל התוצאות האפשריות בניסוי}}$

דוגמה

הניסוי: הטלת קובייה הוגנת.
 המאורע: התוצאה קטנה מ-4.
 התוצאות במאורע זה: המספרים 1, 2 ו-3.
 ההסתברות למאורע: $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

דוגמה

הניסוי: הוצאת כדור מכל שיש בו 5 כדורים לבנים ו-5 כדורים שחורים.
 המאורע: הוצאת כדור שחור.
 ההסתברות למאורע: $\frac{\text{מספר הכדורים השחורים}}{\text{סך כל הכדורים בכד}} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$.

הסתברות התרחשותם של שני מאורעות

כאשר שני מאורעות מתרחשים בעת ובעונה אחת או בזה אחר זה ייתכנו שני מצבים:

- א. **המאורעות בלתי תלויים**, כלומר ההסתברות של המאורע האחד אינה מושפעת מהתרחשותו של המאורע האחר.
- ב. **המאורעות תלויים**, כלומר ההסתברות של מאורע אחד מושפעת מהתרחשותו של מאורע אחר. במילים אחרות, ההסתברות של מאורע מסוים לא תהיה (או בתנאי) התרחשותו של מאורע אחר שונה מההסתברות של המאורע (ללא התנאי).

דוגמה

בכד יש 10 כדורים: 5 לבנים ו-5 שחורים. מוציאים 2 כדורים מהכד, בזה אחר זה. ידוע שהכדור הראשון שהוצא הוא שחור. מה ההסתברות שהכדור השני שהוצא גם הוא שחור? ייתכנו שני מצבים –

מצב א: מחזירים את הכדור הראשון לכד.

מכיוון שהחזרנו את הכדור לכד, לא חל שינוי במספר הכדורים בכד, ובפרט לא חל שינוי במספר הכדורים השחורים.

ההסתברות להוציא כדור שני שחור היא $\frac{5}{10} = \frac{1}{2}$ והיא שווה להסתברות להוציא כדור ראשון שחור. מכאן, שאין חשיבות לכך שהכדור הוצא שני.

כלומר, המאורע "הוצאת כדור ראשון שחור" והמאורע "הוצאת כדור שני שחור" הם מאורעות בלתי תלויים.

מצב ב: לא מחזירים את הכדור הראשון לכד.

לאחר שהוצאנו מהכד כדור שחור נשארו בכד 9 כדורים סך הכול, מתוכם 4 כדורים שחורים. לכן, ההסתברות להוציא כדור שני שחור היא $\frac{4}{9}$.

הסתברות זו שונה מההסתברות להוציא כדור ראשון שחור.

כלומר, המאורע "הוצאת כדור ראשון שחור" והמאורע "הוצאת כדור שני שחור" הם מאורעות תלויים.

ההסתברות להתרחשותם של שני מאורעות בלתי תלויים (בעת ובעונה אחת או זה לאחר זה) היא מכפלת ההסתברויות של כל מאורע בנפרד.

דוגמה

הניסוי: הטלת שתי קוביות הוגנות – אחת אדומה והאחרת צהובה.

נסמן את המאורע "קבלת מספר קטן מ-3 בקובייה האדומה" ב-A. ההסתברות למאורע A היא $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

נסמן את המאורע "קבלת מספר זוגי בקובייה הצהובה" ב-B. ההסתברות למאורע B היא $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

מכיוון שתוצאת הטלתה של קובייה אחת אינה משפיעה על הסתברות התוצאה המתקבלת בהטלת הקובייה האחרת, המאורע A והמאורע B הם מאורעות בלתי תלויים.

ההסתברות להתרחשות המאורע A והמאורע B יחד היא $\left(\begin{matrix} \text{הסתברות} \\ \text{מאורע A} \end{matrix} \times \begin{matrix} \text{הסתברות} \\ \text{מאורע B} \end{matrix} \right)$, כלומר $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$.

נגדיר שני מאורעות תלויים A ו-B (בניסוי כלשהו).

הסתברות של המאורע B בתנאי שהתרחש המאורע A היא: מספר התוצאות המשותפות ל-B ול-A / מספר התוצאות ב-A

דוגמה

הניסוי: הטלת קובייה.
 מה ההסתברות לקבל תוצאה קטנה מ-4 אם ידוע שהתקבלה תוצאה זוגית?
 נסמן את המאורע "התקבלה תוצאה זוגית" ב-A, ואת המאורע "התקבלה תוצאה קטנה מ-4" ב-B.
 ננסח את השאלה מחדש באמצעות המאורעות: מה ההסתברות של B אם ידוע (בתנאי) שהתרחש A?
 יש 3 תוצאות במאורע A: 2, 4 ו-6.
 יש 3 תוצאות במאורע B: 1, 2 ו-3.
 אבל אם ידוע שהמאורע A התרחש יש רק תוצאה אפשרית אחת ל-B: 2.
 או במילים אחרות, התוצאה "2" היא התוצאה היחידה המשותפת ל-A ול-B.
 לכן ההסתברות של B אם ידוע ש-A התרחש היא: $\frac{1}{3}$.
 הסתברות זו שונה מההסתברות של B (ללא התנאי) השווה ל- $\frac{1}{2}$.

דרך, מהירות, זמן

מהירותו של גוף היא המרחק שהגוף עובר ביחידת זמן.

הנוסחה המקשרת בין המהירות, למרחק שעבר הגוף ולזמן שנדרש לו לעבור את המרחק היא: $v = \frac{s}{t}$.

כאשר: v = מהירות
 s = מרחק
 t = זמן

מנוסחה זו אפשר לגזור את כל הקשרים האפשריים בין מרחק, מהירות וזמן: $s = v \cdot t$, $t = \frac{s}{v}$.

דוגמה

רכבת נסעה 240 ק"מ במהירות של 80 קמ"ש. כמה זמן ארכה הנסיעה?
 נתונים v (80 קמ"ש) ו- s (240 ק"מ), ויש לחשב את t .
 מכיוון שהמהירות נתונה בקילומטרים לשעה, זמן הנסיעה יחושב בשעות.
 נציב את הנתונים בנוסחה $t = \frac{s}{v}$: $t = \frac{240}{80} = 3$.
 כלומר, הנסיעה ארכה 3 שעות.

יחידות המדידה של שניים מהגדלים קובעות את יחידות המדידה של הגודל השלישי.
 למשל: אם המרחק מצוין בקילומטרים (ק"מ), והזמן - בשעות, תצוין המהירות בקילומטרים לשעה (קמ"ש).
 אם המרחק מצוין במטרים, והזמן - בשניות, תצוין המהירות במטרים לשנייה.
 אפשר להמיר מטרים לק"מ, ושניות - לשעות, ולהפך.
 בכל ק"מ יש 1,000 מטרים (1 מטר = $\frac{1}{1,000}$ ק"מ).
 בכל שעה יש 3,600 שניות, שהן 60 דקות (1 שנייה = $\frac{1}{3,600}$ שעה).

מהירות של 1 קמ"ש שווה למהירות של $\frac{5}{18}$ מטרים לשנייה $\left(\frac{1,000}{3,600} = \frac{5}{18}\right)$.
 מהירות של 1 מטרים לשנייה שווה למהירות של 3.6 קמ"ש $\left(\frac{1}{\frac{1}{3,600}} = \frac{3,600}{1} = 3.6\right)$.

הספק, עבודה, זמן

הספק הוא כמות עבודה ביחידת זמן.

הנוסחה המקשרת בין ההספק, לכמות העבודה ולזמן הנדרש לביצוע העבודה היא: $p = \frac{w}{t}$.

$$\begin{aligned} \text{כאשר: } p &= \text{הספק} \\ w &= \text{כמות עבודה} \\ t &= \text{זמן} \end{aligned}$$

מנוסחה זו אפשר לגזור את כל הקשרים האפשריים בין הספק, כמות עבודה וזמן: $w = p \cdot t$, $t = \frac{w}{p}$.

דוגמה

בנאי מסיים לבנות קיר אחד ב-3 שעות. כמה שעות יידרשו לשני בנאים העובדים באותו הקצב לסיים את בנייתם של 5 קירות?

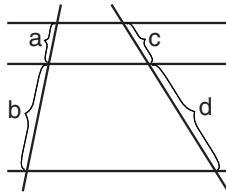
בשאלה נתונה כמות העבודה של בנאי אחד (קיר אחד) וזמן עבודתו (3 שעות). לכן ההספק שלו הוא $\frac{1}{3}$ קיר בשעה.

מכיוון שהשאלה היא על שני בנאים, ההספק של שניהם יחד הוא $2 \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$ קירות בשעה.

נתונה גם כמות העבודה ששני הבנאים יידרשו לעשות - 5 קירות, ולכן אפשר לחשב את הזמן שיידרש להם:

$$t = \frac{5}{\frac{2}{3}} = 5 \cdot \frac{3}{2} = \frac{15}{2} = 7\frac{1}{2} \text{ שעות.}$$

ישרים מקבילים (קווים מקבילים)



קווים מקבילים החותכים שני ישרים כלשהם, מחלקים את הישרים לקטעים פרופורציונליים באורכם.

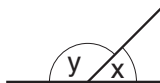
למשל, בסרטוט $\frac{a}{a+b} = \frac{c}{c+d}$ וגם $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$

אפשר למצוא יחסים נוספים בין הקטעים על סמך היחסים הנתונים.

זוויות

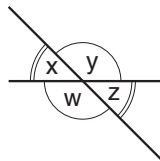
- זווית ישרה היא זווית של 90° , בסרטוטים היא מסומנת \square .
- זווית חדה היא זווית הקטנה מ- 90° .
- זווית קהה היא זווית הגדולה מ- 90° .
- זווית שטוחה היא זווית של 180° .

זוויות צמודות



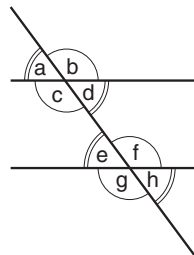
שתי זוויות הנוצרות בין ישר ובין קרן היוצאת מנקודה על הישר נקראות זוויות צמודות. הן יוצרות יחד זווית שטוחה, ולכן סכומן הוא 180° . למשל, בסרטוט x ו- y הן זוויות צמודות, לכן $x + y = 180^\circ$.

זוויות קדקודיות



במפגש של שני ישרים החותכים זה את זה, נוצרות ארבע זוויות. כל שתיים מהן שאינן צמודות נקראות זוויות קדקודיות, והן שוות זו לזו בגודלן. למשל, בסרטוט x ו- z הן זוויות קדקודיות וכך גם y ו- w . לכן $x = z$ וגם $w = y$.

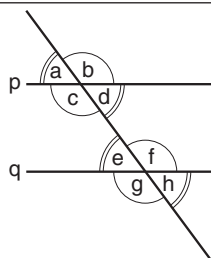
כאשר ישר חותך שני ישרים מקבילים, נוצרות שמונה זוויות. למשל, בסרטוט a, b, c, d, e, f, g, h .



זוויות מתאימות הן זוויות הנמצאות באותו צד של הישר החותך ובאותו צד של הקווים המקבילים. זוויות מתאימות שוות זו לזו בגודלן. לכן בסרטוט $d = h$, $c = g$, $b = f$, $a = e$.

זוויות מתחלפות נמצאות בצדדים נגדיים של הישר החותך, ובצדדים נגדיים של הישרים המקבילים. זוויות מתחלפות שוות זו לזו בגודלן. לכן בסרטוט $d = e$, $c = f$, $b = g$, $a = h$.

דוגמה

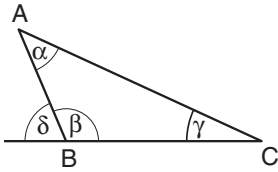


נתון: הישרים p ו- q מקבילים.
 $d + f = ?$
 $c + d = 180^\circ$ הן זוויות צמודות, ולכן
 $c = f$ הן זוויות מתחלפות, ולכן
 לכן $d + f = d + c = 180^\circ$, והתשובה היא 180° .

משולשים

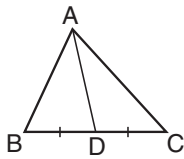
זוויות המשולש

סכום הזוויות הפנימיות בכל משולש הוא 180° . למשל, בסרטוט $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$.
 זווית הצמודה לאחת מזוויות המשולש נקראת זווית חיצונית, והיא שווה לסכום שתי
 הזוויות האחרות במשולש. למשל, בסרטוט δ היא זווית הצמודה ל- β ולכן $\delta = \alpha + \gamma$.



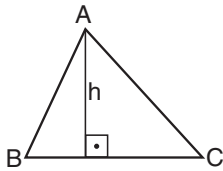
בכל משולש, מול זווית גדולה יותר נמצאת צלע ארוכה יותר.
 למשל, בסרטוט אם $\gamma < \alpha < \beta$, אז הצלע AC (שנמצאת מול הזווית β) ארוכה מהצלע
 BC (שנמצאת מול הזווית α), והצלע BC ארוכה מהצלע AB (שנמצאת מול הזווית γ).

תיכון במשולש הוא קטע המחבר קדקוד במשולש עם אמצע הצלע שמולו.
 למשל, במשולש שבסרטוט AD הוא תיכון לצלע BC ($BD = DC$).



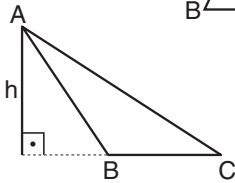
גובה במשולש

גובה לצלע במשולש הוא קטע היוצא מקדקוד במשולש לצלע
 שמולו (או להמשכה) ומאונך לאותה הצלע.
 למשל, במשולשים שבסרטוט h הוא הגובה לצלע BC.



שטח המשולש

שטח משולש שווה למחצית המכפלה של אורך צלע במשולש באורך הגובה לצלע זו.
 למשל, שטחו של כל אחד משני המשולשים ABC בסרטוט הוא $\frac{BC \cdot h}{2}$.

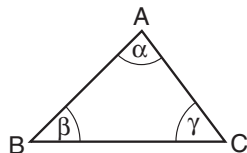


אי-שוויון המשולש

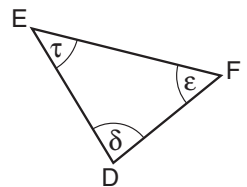
בכל משולש, סכום האורכים של כל שתיים מצלעותיו גדול מאורך הצלע השלישית.
 למשל, במשולשים שבסרטוטים $(AB + BC) > AC$.

משולשים חופפים

שתי צורות גאומטריות הן צורות חופפות אם אפשר להניח אחת מהן על גבי האחרת
 באופן ששתייהן מכסות זו את זו. דוגמה של חפיפת צורות גאומטריות היא **חפיפת
 משולשים**. במשולשים חופפים הצלעות והזוויות שוות בהתאמה.



למשל, בסרטוט אם משולש ABC חופף למשולש DEF אז צלעותיהם שוות בהתאמה:
 $AB = DE, BC = EF, AC = DF$ וגם זוויותיהם שוות בהתאמה: $\alpha = \delta, \beta = \tau, \gamma = \epsilon$.



כל אחד מארבעת המשפטים הבאים מאפשר לנו להסיק ששני משולשים חופפים:

(א) שני משולשים חופפים אם שתיים מצלעות המשולש האחד שוות בהתאמה לשתיים
 מצלעות המשולש האחר, והזווית שבין צלעות אלו במשולש האחד שווה לזווית
 המתאימה במשולש האחר (צ, ז, צ).
 למשל, בסרטוט אם $AC = DF, AB = DE$ ו- $\alpha = \delta$, אז המשולשים חופפים.

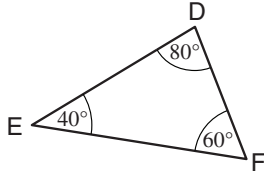
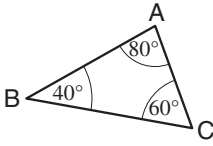
(ב) שני משולשים חופפים אם שתיים מזוויות המשולש האחד שוות בהתאמה לשתיים
 מזוויות המשולש האחר, והצלע שבין זוויות אלו במשולש האחד שווה לצלע המתאימה
 במשולש האחר (ז, צ, ז).

למשל, בסרטוט אם $\alpha = \delta$ ו- $\beta = \tau$, אז המשולשים חופפים.

(ג) שני משולשים חופפים אם שלוש הצלעות במשולש האחד שוות לשלוש הצלעות
 במשולש האחר (צ, צ, צ).

(ד) שני משולשים חופפים אם שתיים מצלעות המשולש האחד שוות בהתאמה לשתיים
 מצלעות המשולש האחר, והזווית שמול הצלע הגדולה מתוך השתיים במשולש האחד
 שווה לזווית המתאימה במשולש האחר (צ, צ, ז).

למשל, בסרטוט אם $AB > AC$ ו- $DE > DF$ ומתקיים $AB = DE, AC = DF$ ו- $\gamma = \epsilon$,
 אז המשולשים חופפים.



משולשים דומים

שני משולשים הם משולשים דומים אם שלוש הזוויות באחד המשולשים שוות לשלוש הזוויות במשולש האחר.

במשולשים דומים היחס בין כל שתי צלעות במשולש האחד שווה ליחס בין שתי הצלעות המתאימות במשולש האחר.

למשל, בסרטוט המשולשים ABC ו-DEF הם משולשים דומים,

$$\frac{AB}{AC} = \frac{DE}{DF} \text{ ולכן}$$

$$\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF} = \frac{BC}{EF} \text{ מכך נובע גם:}$$

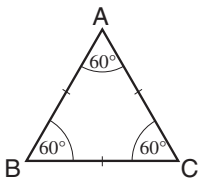
משולשים חופפים הם בהכרח גם משולשים דומים.

סוגי משולשים

משולש שווה-צלעות הוא משולש שכל צלעותיו שוות זו לזו באורכן.

למשל, בסרטוט $AB = BC = AC$. במשולש כזה גם כל הזוויות שוות בגודלן (60°).

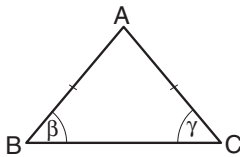
אם אורך הצלע של משולש כזה הוא a , אז גובהו הוא $a \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$ ושטחו הוא $a^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}$.



משולש שווה-שוקיים הוא משולש ששתיים מצלעותיו שוות זו לזו באורכן.

למשל, בסרטוט $AB = AC$. הצלע השלישית במשולש שווה-שוקיים נקראת "בסיס".

שתי הזוויות שמול הצלעות השוות, שוות זו לזו בגודלן. למשל, בסרטוט $\beta = \gamma$.



משולש חד-זווית הוא משולש שכל זוויותיו חדות.

משולש קהה-זווית הוא משולש שאחת מזוויותיו קהה.

משולש ישר-זווית הוא משולש שאחת מזוויותיו ישרה (90°).

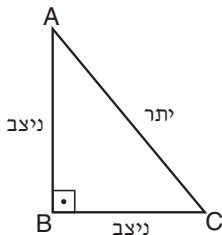
הצלע שמול הזווית הישרה נקראת **יתר** (בסרטוט: הצלע AC) ושתי הצלעות האחרות

נקראות **ניצבים** (בסרטוט: AB ו-BC).

לפי משפט פיתגורס: במשולש ישר-זווית ריבוע היתר שווה לסכום ריבועי הניצבים.

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 \text{ למשל, בסרטוט}$$

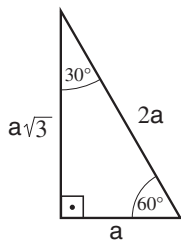
בעזרת נוסחה זו אפשר למצוא את אורכה של כל צלע, אם נתונים אורכיהן של שתי הצלעות האחרות.



במשולש ישר-זווית שבו גודלי הזוויות הם 30° , 60° ו- 90° , אורך הניצב שמול הזווית 30° שווה למחצית אורך היתר.

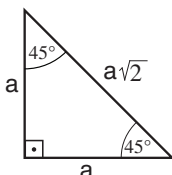
למשל, בסרטוט אורך היתר הוא $2a$ ולכן אורך הניצב שמול הזווית שגודלה 30° הוא a .

כמו כן, לפי משפט פיתגורס, אורך הניצב שמול הזווית שגודלה 60° הוא $a\sqrt{3}$.



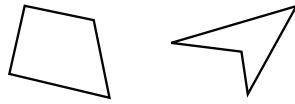
במשולש ישר-זווית ושווה-שוקיים גודלי הזוויות הם 45° , 45° ו- 90° , שני הניצבים שווים זה לזה באורכם, ואורך היתר גדול פי $\sqrt{2}$ מאורך הניצבים (לפי משפט פיתגורס).

למשל, בסרטוט אורך כל אחד מהניצבים הוא a ולכן אורך היתר הוא $a\sqrt{2}$.



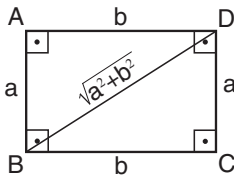
מרובעים

מרובע הוא כל מצולע בעל 4 צלעות. לדוגמה:



מלבן וריבוע

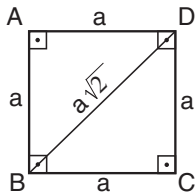
מלבן הוא מרובע שכל זוויותיו ישרות. במלבן כל זוג צלעות נגדיות שוות זו לזו באורכן.



היקף המלבן שבסרטוט הוא $2a + 2b = 2(a + b)$.

אורך האלכסון במלבן שבסרטוט הוא $\sqrt{a^2 + b^2}$ (לפי משפט פיתגורס).

שטח המלבן שווה למכפלת האורכים של שתי צלעות סמוכות. שטח המלבן שבסרטוט הוא $a \cdot b$.



ריבוע הוא מלבן שכל צלעותיו שוות זו לזו באורכן.

היקף הריבוע שבסרטוט הוא $4a$.

אורך אלכסון הריבוע שבסרטוט הוא $\sqrt{a^2 + a^2} = a\sqrt{2}$.

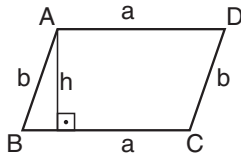
שטח הריבוע שווה לריבוע אורך הצלע. שטח הריבוע שבסרטוט הוא a^2 .

מקבילית ומעוין

מקבילית היא מרובע שבו כל זוג צלעות נגדיות מקבילות זו לזו ושוות באורכן.

למשל, במקבילית שבסרטוט $AB \parallel DC$, $AD \parallel BC$

$AB = DC$, $AD = BC$



האלכסונים במקבילית חוצים זה את זה.

היקף המקבילית שבסרטוט הוא $2a + 2b$.

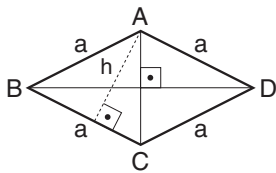
גובה במקבילית הוא קטע המחבר שתי צלעות נגדיות (או המשכן) ומאונך להן.

שטח מקבילית שווה למכפלת צלע בגובה לאותה הצלע.

למשל, במקבילית שבסרטוט השטח הוא $a \cdot h$.

מעוין הוא מרובע שכל ארבע צלעותיו שוות זו לזו באורכן.

במעוין כל זוג של צלעות נגדיות מקבילות זו לזו, ולכן הוא למעשה מקבילית שכל צלעותיה שוות.



אלכסונים במעוין

מכיוון שמעוין הוא סוג של מקבילית, גם בו האלכסונים חוצים זה את זה.

במעוין האלכסונים גם מאונכים זה לזה.

היקף המעוין שבסרטוט הוא $4a$.

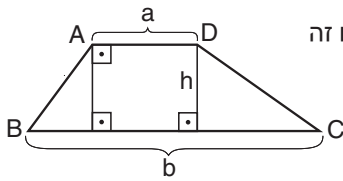
שטח מעוין

מכיוון שמעוין הוא סוג של מקבילית, גם את שטחו אפשר לחשב כמכפלת צלע בגובה (לאותה הצלע).

למשל, שטח המעוין שבסרטוט הוא $a \cdot h$.

שטח המעוין הוא גם מחצית המכפלה של אורכי האלכסונים. למשל, שטח המעוין שבסרטוט הוא $\frac{AC \cdot BD}{2}$.

טרפז



טרפז הוא מרובע שבו **רק** זוג אחד של צלעות מקבילות זו לזו. הצלעות המקבילות נקראות **בסיסים**. שתי הצלעות האחרות נקראות **שוקיים**. בסיסי הטרפז אינם שווים זה לזה, ולכן מכנים אותם "בסיס גדול" ו"בסיס קטן".

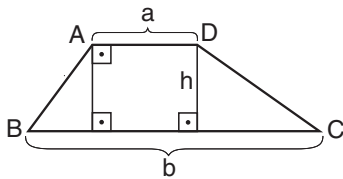
גובה בטרפז הוא קטע המחבר בין שני בסיסי הטרפז ומאונך להם.

שטח הטרפז שווה למחצית המכפלה של סכום אורכי הבסיסים בגובה.

$$\text{למשל, שטח הטרפז שבסרטוט הוא } \frac{(a+b) \cdot h}{2}.$$

טרפז שווה-שוקיים הוא טרפז שבו השוקיים שוות זו לזו באורכן.

למשל בסרטוט: $AB = DC$.



בטרפז שווה-שוקיים זוויות הבסיס הגדול שוות זו לזו, וזוויות הבסיס הקטן שוות זו לזו.

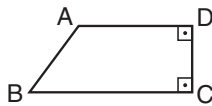
למשל, בסרטוט $\angle ABC = \angle DCB = \beta$, $\angle BAD = \angle CDA = \alpha$.

בטרפז שווה-שוקיים, כשמורידים שני גבהים מקצות הבסיס הקטן לבסיס הגדול,

מתקבלים מלבן ושני משולשים ישרי-זווית חופפים (ABP ו-DCQ).

טרפז ישר-זווית הוא טרפז שבו אחת מזוויות הבסיס הגדול ישרה (וכמובן, גם אחת

מזוויות הבסיס הקטן).



דלתון

דלתון הוא מרובע המורכב משני משולשים שווים שוקיים המחוברים בבסיסם.

למשל, בסרטוט הדלתון ABCD מורכב מהמשולשים ABD ו-BCD,

($AB = AD$, $CB = CD$).

האלכסון המחבר בין הקדקודים של שני המשולשים שווה-השוקיים

חוצה את האלכסון שהוא בסיסם של שני המשולשים האלה, ומאונך לו.

למשל, בסרטוט AC חוצה את BD ($BP = PD$) וגם $AC \perp BD$.

היקף הדלתון שבסרטוט הוא $2a + 2b$.

שטח דלתון שווה למחצית המכפלה של אורכי האלכסונים.

$$\text{למשל, שטח הדלתון שבסרטוט הוא } \frac{AC \cdot BD}{2}.$$

מצולע משוכלל

מצולע משוכלל הוא מצולע שכל צלעותיו שוות זו לזו באורכן וכל זוויותיו הפנימיות שוות זו לזו בגודלן.

למשל, מתומן משוכלל הוא מצולע משוכלל בעל 8 צלעות.

מחומש משוכלל הוא מצולע משוכלל בעל 5 צלעות.

ריבוע הוא מצולע משוכלל בעל 4 צלעות.

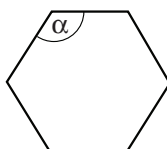
משולש שווה-צלעות הוא מצולע משוכלל בעל 3 צלעות.

אפשר לחשב את גודל הזווית הפנימית α במצולע משוכלל בעל n צלעות בעזרת הנוסחה:

$$\alpha = \left(180^\circ - \frac{360^\circ}{n}\right) = \left(\frac{180^\circ n - 360^\circ}{n}\right)$$

למשל, במשושה משוכלל כבסרטוט, גודל כל אחת מהזוויות הפנימיות הוא 120° :

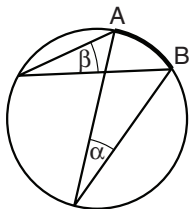
$$\alpha = 180^\circ - \frac{360^\circ}{6} = 120^\circ$$



מעגל, עיגול

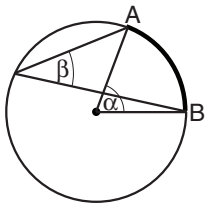
רדיוס הוא קטע המחבר את מרכז המעגל עם נקודה כלשהי על היקפו.
מיתר במעגל הוא קטע העובר בתוך המעגל ומחבר שתי נקודות שונות הנמצאות על היקפו.
קוטר הוא מיתר במעגל העובר דרך מרכז המעגל.
 אורך הקוטר במעגל שווה לפעמיים אורך הרדיוס. אם נסמן את אורך רדיוס המעגל ב- r , אז אורך הקוטר במעגל הוא $2r$.
היקף מעגל שאורך רדיוסו r הוא $2\pi r$ (ערכו של π הוא 3.14 בקירוב).
שטח מעגל שאורך רדיוסו r הוא πr^2 . (לעתים משתמשים במונח "שטח עיגול" במקום "שטח מעגל").
 חלק מהיקף המעגל התחום בין שתי נקודות נקרא **קשת**.
 חלק משטח המעגל התחום בין שני רדיוסים וקשת נקרא **גזרה**.

זווית היקפית



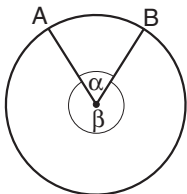
זווית היקפית היא זווית שקדקודה נמצא על היקף המעגל ושוקיה הם מיתרים במעגל. זוויות היקפיות הנשענות על אותה הקשת שוות בגודלן. למשל, בסרטוט הזוויות α ו- β הן זוויות היקפיות הנשענות שתיהן על הקשת AB, ולכן $\alpha = \beta$. זווית היקפית הנשענת על קוטר (כלומר, על קשת שאורכה מחצית היקף המעגל) היא זווית ישרה.

זווית מרכזית



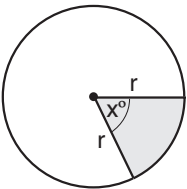
זווית מרכזית היא זווית שקדקודה במרכז המעגל ושוקיה הם רדיוסים במעגל. זווית מרכזית גדולה פי 2 מכל זווית היקפית הנשענת על אותה הקשת. למשל, בסרטוט α היא זווית מרכזית ו- β היא זווית היקפית, ושתיהן נשענות על אותה הקשת AB, ולכן $\alpha = 2\beta$.

אורך קשת



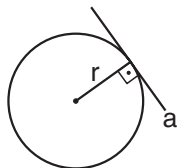
שתי נקודות על היקף מעגל תוחמות שתי קשתות. למשל, בסרטוט הנקודות A ו-B תוחמות שתי קשתות: האחת מתאימה לזווית המרכזית α , והאחרת - לזווית המרכזית β . הקשת הקצרה AB מתאימה לזווית הקטנה מן השתיים - α . אם רדיוס המעגל הוא r , אורכה של קשת זו הוא $2\pi r \cdot \frac{\alpha}{360}$.

שטח גזרה

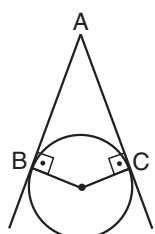


הזווית המרכזית הנוצרת בין שני הרדיוסים התוחמים גזרה נקראת גם זווית ראש. למשל, החלק הכהה בסרטוט הוא גזרת מעגל בעלת זווית ראש x° . שטח גזרת המעגל הוא $\pi r^2 \cdot \frac{x}{360}$.

משיק למעגל



משיק למעגל הוא ישר הנוגע בהיקף המעגל בנקודה אחת בלבד, הנקראת "נקודת ההשקה". הזווית בין המשיק לרדיוס (בנקודת ההשקה) היא זווית ישרה. למשל, בסרטוט הישר a משיק למעגל שרדיוסו r .



שני ישרים המשיקים לאותו מעגל ונחתכים בנקודה אחת נקראים גם שני משיקים למעגל היוצאים מנקודה אחת. אורך כל אחד מהמשיקים הוא אורך הקטע המחבר את נקודת החיתוך של המשיקים עם נקודת ההשקה שלו. משיקים למעגל היוצאים מנקודה אחת שווים זה לזה באורכם. למשל, בסרטוט A היא נקודת החיתוך, B ו-C הן נקודות ההשקה, ולכן $AB = AC$.

מצולע החוסם מעגל

מצולע החוסם מעגל הוא מצולע שכל אחת מצלעותיו משיקה למעגל.

מצולע החוסם במעגל

מצולע החוסם במעגל הוא מצולע שכל קדקודיו נמצאים על היקף המעגל.

משולש החוסם במעגל

כל משולש אפשר לחסום במעגל.

לכל משולש יש מעגל אחד בלבד החוסם אותו.

אם המשולש החוסם הוא ישר-זווית, מרכז המעגל החוסם אותו הוא אמצע היתר של המשולש.

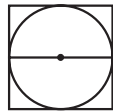
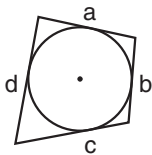
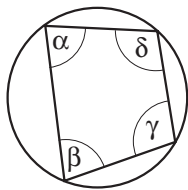
מרובע החוסם במעגל

לא כל מרובע אפשר לחסום במעגל.

במרובע החוסם במעגל סכום זוויות נגדיות שווה תמיד ל- 180° .

$$\alpha + \gamma = 180^\circ$$

$$\beta + \delta = 180^\circ$$



מרובע החוסם מעגל

לא כל מרובע יכול לחסום מעגל.

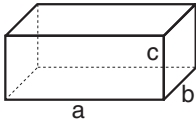
במרובע החוסם מעגל, סכום האורכים של כל זוג צלעות נגדיות שווה.

$$a + c = b + d$$

כאשר המרובע הוא ריבוע, אורך צלע הריבוע שווה לאורך קוטר במעגל.

צורות תלת-ממדיות (גופים)

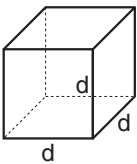
תיבה וקובייה



תיבה היא גוף תלת-ממדי בעל שש פאות מלבניות. שלושת ממדי התיבה הם האורך, הרוחב והגובה (בסרטוט a, b ו-c בהתאמה). כל פאה בתיבה מאונכת לשכנותיה.

שטח הפנים של תיבה הוא סכום שטחי פאותיה. שטח הפנים של התיבה בסרטוט הוא:
 $ab + ac + bc + ab + ac + bc = 2ab + 2ac + 2bc$

נפח של תיבה הוא מכפלה של האורך, הרוחב והגובה. נפח התיבה בסרטוט הוא $a \cdot b \cdot c$.

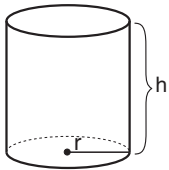


קובייה היא תיבה שבה האורך, הרוחב והגובה שווים זה לזה בגודלם. בקובייה כל הפאות הן ריבועים חופפים.

שטח כל פאה בקובייה שבסרטוט הוא d^2 , ולכן **שטח הפנים** של הקובייה הוא $6d^2$. **נפח** הקובייה שבסרטוט הוא d^3 .

גליל

גליל הוא גוף תלת-ממדי בעל שני בסיסים שהם מעגלים חופפים זה לזה הנמצאים במישורים מקבילים, ומעטפת שמחברת ביניהם. הקו המחבר את מרכזי המעגלים מאונך לכל אחד מהבסיסים.



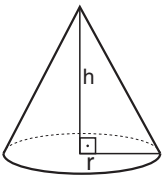
שטח המעטפת של גליל שאורך רדיוס בסיסו r וגובהו h הוא מכפלת היקף הבסיס בגובה הגליל, כלומר $2\pi r \cdot h$.

שטח הפנים של גליל הוא סכום שטחי הבסיסים והמעטפת. שטח כל בסיס הוא πr^2 ושטח המעטפת הוא $2\pi r \cdot h$, לכן שטח הפנים הוא $2\pi r \cdot h + 2\pi r^2 = 2\pi r \cdot (h + r)$.

נפח הגליל הוא מכפלת שטחו של אחד הבסיסים בגובה הגליל, כלומר $\pi r^2 \cdot h$.

חרוט

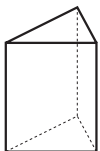
חרוט ישר הוא גוף תלת-ממדי שנוצר מחיבור הנקודות שעל היקף מעגל עם נקודה הנמצאת מחוץ למישור המעגל. הנקודה נקראת "קדקוד החרוט" והיא נמצאת על ישר המאונך למישור המעגל ועובר במרכז המעגל (ראו סרטוט).



נפח חרוט שרדיוס בסיסו r וגובהו h הוא $\frac{\pi r^2 \cdot h}{3}$.

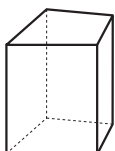
מנסרה

מנסרה ישרה היא גוף תלת-ממדי ששני בסיסיו הם מצולעים החופפים זה לזה ונמצאים במישורים מקבילים, ופאותיו הצדדיות הן מלבנים. כל מנסרה מכונה על פי מספר הצלעות של בסיסה: מנסרה משולשת היא בעלת בסיסים משולשים, מנסרה מרובעת היא בעלת בסיסים מרובעים וכו' (ראו סרטוטים).



גובה המנסרה הוא אורך קטע המחבר בין הבסיסים ומאונך להם. זה המרחק בין בסיסי המנסרה.

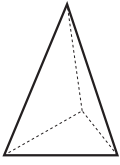
שטח המעטפת של מנסרה הוא סכום שטחי כל הפאות הצדדיות. אפשר לחשב את שטח המעטפת גם כמכפלה של היקף בסיס המנסרה בגובה המנסרה.



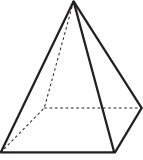
שטח הפנים של מנסרה הוא סכום שטח המעטפת ושטחי שני הבסיסים של המנסרה.

נפח המנסרה שווה למכפלת שטח אחד הבסיסים בגובה המנסרה.

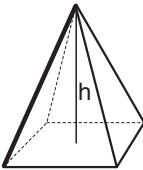
פירמידה



פירמידה ישרה היא גוף תלת-ממדי שנוצר מחיבור קדקודי מצולע משוכלל כלשהו עם נקודה הנמצאת מחוץ למישור של המצולע. המצולע נקרא "בסיס הפירמידה" והנקודה נקראת "קדקוד הפירמידה".



הפאות הצדדיות של הפירמידה הן משולשים. כל פירמידה מכונה על פי מספר הצלעות של בסיסה: פירמידה משולשת היא בעלת בסיס משולש, פירמידה מרובעת היא בעלת בסיס מרובע וכו' (ראו סרטונים).



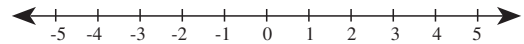
גובה הפירמידה הוא אורך הקטע היורד מקדקוד הפירמידה לבסיסה ומאונך למישור הבסיס שלה. זה המרחק בין קדקוד הפירמידה לבסיס שלה (ראו סרטוט).
אם S הוא שטח בסיס הפירמידה ו- h הוא גובה הפירמידה, אז **נפח** הפירמידה הוא $\frac{S \cdot h}{3}$.

מקצוע

מקצוע בגוף תלת-ממדי הוא הקו הישר הנוצר במקום המפגש בין שתי פאות. בפירמידה שבסרטוט הקטע המסומן בקו מודגש הוא אחד המקצועות. בתיבה יש 12 מקצועות.

ציר המספרים

ציר המספרים משמש להצגה גאומטרית של יחסים בין מספרים.

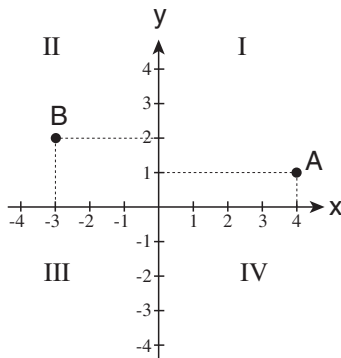


המספרים על ציר המספרים גדלים ככל שמתקדמים ימינה.

המרחק בין נקודות על ציר המספרים פרופורציונלי להפרש בין הערכים המספריים המתאימים לנקודות. למשל, המרחק בין הנקודות המתאימות לערכים (-4) ו-(-2) שווה למרחק בין הנקודות המתאימות לערכים 3 ו-5.

מערכת צירים קרטזית

במערכת צירים קרטזית במישור יש שני צירי מספרים המאונכים זה לזה. הציר האופקי נקרא ציר ה- x , והציר האנכי נקרא ציר ה- y . בציר ה- x המספרים גדלים ככל שמתקדמים ימינה, ובציר ה- y המספרים גדלים ככל שמתקדמים מעלה.



הצירים מחלקים את המישור לארבעה רביעים, ובדרך כלל הם מסומנים בספרות הרומיות I, II, III, IV.

לכל נקודה במישור אפשר להתאים זוג ערכים x ו- y המתארים את מקומה ביחס לצירים.

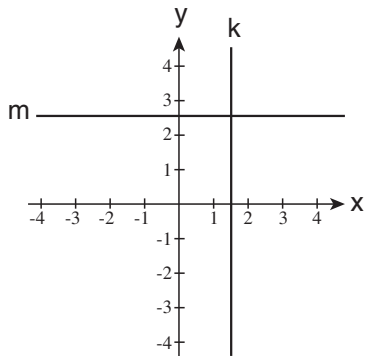
למשל, בסרטוט ערך ה- x של הנקודה A הוא 4, וערך ה- y שלה הוא 1. ערך ה- x של הנקודה B הוא (-3), וערך ה- y שלה הוא 2.

מקובל לסמן את ערכי הנקודה בתוך סוגריים - כשערך ה- x משמאל לערך ה- y , כך: (x, y) . לעתים מסמנים את ערכי הנקודה בצמוד לאות המייצגת אותה, למשל $A(4, 1)$, $B(-3, 2)$.

לעתים מכנים את ערכי הנקודה (x, y) בשם **שיעורי הנקודה**. הנקודה במישור המתאימה ל- $(0, 0)$ היא נקודת מפגש הצירים,

והיא נקראת **ראשית הצירים**.

לכל הנקודות על ישר המקביל לציר ה-x יש אותו הערך y ולכל הנקודות על ישר המקביל לציר ה-y יש אותו הערך x.

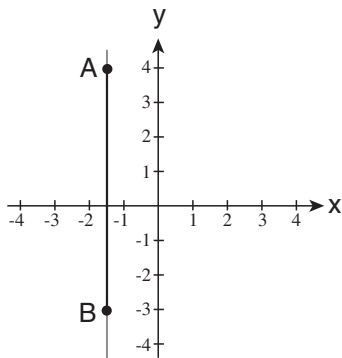


למשל, בסרטוט

הישר k מקביל לציר ה-y ולכן לכל הנקודות שעל הישר k יש אותו הערך x (בסרטוט $x = 1.5$).

הישר m מקביל לציר ה-x ולכן לכל הנקודות שעל הישר m יש אותו הערך y (בסרטוט $y = 2.5$).

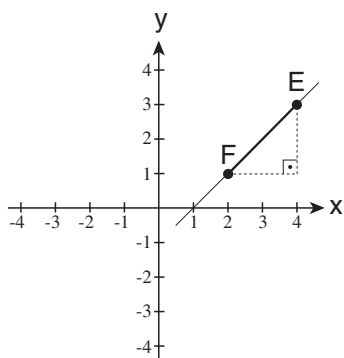
דרך כל שתי נקודות במישור עובר ישר אחד בלבד. החלק של אותו ישר הנמצא בין שתי הנקודות נקרא קטע.



אם הקטע מקביל לציר ה-y, אורכו הוא ההפרש (בערך מוחלט) בין ערכי ה-y של הנקודות.

למשל, בסרטוט הקטע AB מקביל לציר ה-y. ערך ה-y של הנקודה A הוא 4 וערך ה-y של הנקודה B הוא (-3). ההפרש בין ערכי ה-y הוא $4 - (-3) = 7$, ולכן אורך הקטע AB הוא 7.

באופן דומה מחשבים אורך קטע המקביל לציר ה-x.



אם הקטע אינו מקביל לאף אחד מהצירים (למשל הקטע EF בסרטוט), אפשר לחשב את אורכו בעזרת משפט פיתגורס: מסרטטים משולש ישר-זווית שבו היתר הוא הקטע, והניצבים מקבילים לציר ה-x ולציר ה-y. אורכו של הניצב המקביל לציר ה-x שווה להפרש בין ערך ה-x של הנקודה E לערך ה-x של הנקודה F (אורכו של הניצב המקביל לציר ה-y שווה להפרש בין ערך ה-y של הנקודה E לערך ה-y של הנקודה F). $(3 - 1 = 2)$

בעזרת משפט פיתגורס אפשר לחשב את אורכו של היתר: $EF = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8}$

שאלות ובעיות

שאלות מתחום האלגברה עוסקות בכמה נושאים: משוואות, דרך, הספק, צירופים, הסתברות ועוד. שאלות מתחום הגאומטריה עוסקות במאפיינים של צורות גאומטריות: שטח, נפח, זוויות ועוד. כמה מהשאלות הן מילוליות, ובהן יש לתרגם תחילה את הבעיה למונחים מתמטיים; שאלות אחרות הן לא מילוליות, ובהן הבעיה מוצגת מלכתחילה במונחים מתמטיים. לפניכם שאלות לדוגמה ובצדן פתרונות והסברים.

שימו לב: הדוגמאות בחוברת זו ממוינות לפי סוגים, אך בבחינה אין חלוקה כזו.

שאלות אלגברה מילוליות

1. נהג נסע מחיפה לאילת בפרק זמן מסוים. שלישי מהדרך הוא עבר במהירות של 75 קמ"ש, חמישית מהדרך הנוותרת הוא עבר בשעה, ואת יתרת הדרך הוא עבר במהירות של 80 קמ"ש. המרחק בין חיפה לאילת הוא 450 ק"מ. אילו נסע הנהג במהירות קבועה לאורך כל הדרך, מה הייתה צריכה להיות מהירות זו כדי שהנסיעה מחיפה לאילת תארך בדיוק אותו משך זמן?

(1) 70 קמ"ש

(2) 75 קמ"ש

(3) 80 קמ"ש

(4) 90 קמ"ש

שאלה זו מוצגת בצורה מילולית, ולכן יש לתרגם אותה תחילה למונחים מתמטיים. ראשית, נגדיר בבירור מה יש למצוא: **המהירות** שבה יש לנסוע כדי לעבור את **המרחק** בין חיפה לאילת באותו פרק **הזמן** שעשה זאת הנהג. אם כן, זו שאלת דרך, ואפשר ליישם בה את הנוסחה המקשרת בין מרחק, מהירות, וזמן: $v = \frac{s}{t}$, שכן המרחק (s) נתון, את הזמן (t) ניתן לחשב, והמהירות (v) היא הנעלם שיש למצוא.

נתון בשאלה כי המרחק בין חיפה לאילת הוא 450 ק"מ.

את הזמן הכולל שהיה דרוש לנהג כדי לעבור את כל המרחק מחיפה לאילת אפשר לחשב כך:

הדרך מחולקת בשאלה לשלושה קטעים. נחשב בכמה זמן עבר הנהג כל קטע -

א. שלישי מהדרך הוא **150 ק"מ**, כי $450 \cdot \frac{1}{3} = 150$. קטע זה מהדרך עבר הנהג **בשתיים**, כי דרושות

שעתיים כדי לעבור 150 ק"מ במהירות של 75 קמ"ש $\left(\frac{150}{75} = 2\right)$.

ב. חמישית מהדרך הנוותרת היא **60 ק"מ**, כי אורכה של הדרך הנוותרת הוא $450 - 150 = 300$, ו- $300 \cdot \frac{1}{5} = 60$.

נתון בשאלה כי הנהג עבר קטע זה מהדרך **בשעה אחת**.

ג. יתרת הדרך היא **240 ק"מ**, כי $450 - 150 - 60 = 240$. קטע זה עבר הנהג **בשלוש שעות**, כי דרושות שלוש שעות כדי לעבור 240 ק"מ במהירות של 80 קמ"ש.

לסיכום, הנסיעה מחיפה לאילת ארכה סך הכול 6 שעות (שעתיים ועוד שעה ועוד שלוש שעות).

כעת אפשר לחשב את המהירות הקבועה שיש לנסוע בה כדי לעבור 450 ק"מ ב-**6 שעות**, על ידי הצבת הנתונים

בנוסחה המתאימה: $v = \frac{s}{t} = \frac{450}{6} = 75$. כלומר, המהירות היא 75 קמ"ש והתשובה הנכונה היא (2).

2. ביום ה-10 לחייו אכל פילון 5 סוכריות. מיום זה ואילך הלך וגדל תיאבונו, ובכל יום הוא אכל פי 2 סוכריות מביום הקודם. כמה סוכריות אכל הפילון ביום ה-14 לחייו?

- (1) 40 (2) 80 (3) 100 (4) 120

ביום ה-10 אכל הפילון 5 סוכריות. מכיוון שמיום זה ואילך הוא אכל בכל יום פי 2 סוכריות משאכל ביום הקודם, הרי שביום ה-11 הוא אכל 10 סוכריות (5·2), ביום ה-12 הוא אכל 20 סוכריות (5·2·2) וכך הלאה. באופן כללי, ביום ה-(n+10) אכל הפילון $5 \cdot 2^n$ סוכריות (n הוא מספר שלם וחיובי). לכן, ביום ה-14 הוא אכל 80 סוכריות ($5 \cdot 2^4 = 80$), והתשובה הנכונה היא (2).

3. בארוחה עסקית במסעדה מסוימת אפשר לבחור אחת מתוך 3 מנות ראשונות שונות ואחת מתוך 4 מנות עיקריות שונות. נוסף על המנה הראשונה ועל המנה העיקרית אפשר לבחור בין מרק לקינוח. כמה אפשרויות שונות של ארוחה עסקית של 3 מנות אפשר להרכיב במסעדה זו?

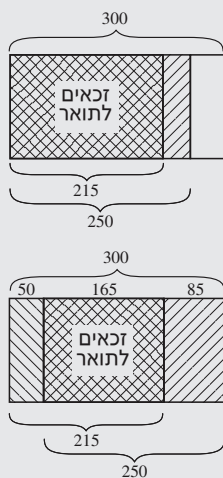
- (1) 12 (2) 14 (3) 18 (4) 24

יש **שלוש** אפשרויות לבחור מנה ראשונה. לכל מנה ראשונה שבחרים אפשר לצרף אחת **מארבע** מנות עיקריות שונות. כלומר, יש 3·4 צירופים שונים של מנה ראשונה ומנה עיקרית. לכל אחד מ-12 הצירופים האלה אפשר להוסיף מרק או קינוח. כלומר, סך הכול יש 2·12 צירופים שונים של שלוש מנות, שהם 24 אפשרויות. לכן התשובה הנכונה היא (4).

4. סטודנט זכאי לתואר ראשון רק אם הוא עובר את כל הבחינות ומגיש את כל העבודות. מתוך 300 סטודנטים, 250 עברו את כל הבחינות ו-215 הגישו את כל העבודות. כמה סטודנטים זכאים לתואר ראשון?

- (1) לכל הפחות 215 (2) לכל היותר 185 (3) בדיוק 215 (4) לכל הפחות 165

אפשר להגדיר שתי קבוצות סטודנטים: קבוצת הסטודנטים שעברו את כל הבחינות וקבוצת הסטודנטים שהגישו את כל העבודות. כל סטודנט המשתייך לשתי הקבוצות זכאי לתואר ראשון. מידת החפיפה בין שתי הקבוצות אינה ידועה, אך ייתכנו שני מצבים קיצוניים. נמחיש אותם בסרטוט:



- במצב של **חפיפה מקסימלית** בין שתי הקבוצות, יהיה מספר הזכאים לתואר מקסימלי. חפיפה מקסימלית תהיה אם כל 215 הסטודנטים שהגישו את כל העבודות גם עברו את כל הבחינות. כלומר, **לכל היותר** 215 סטודנטים יהיו זכאים לתואר.

- במצב של **חפיפה מינימלית** בין שתי הקבוצות, יהיה מספר הזכאים לתואר מינימלי. 50 סטודנטים (300 - 250) אינם זכאים לתואר משום שלא עברו את כל הבחינות, ו-85 סטודנטים (300 - 215) אינם זכאים לתואר משום שלא הגישו את כל העבודות. כלומר, מספר הלא-זכאים מאחת הסיבות לפחות הוא $50 + 85 = 135$. זה מספר הלא-זכאים המקסימלי. לכן מספר הזכאים המינימלי הוא $300 - 135 = 165$. כלומר, **לפחות** 165 סטודנטים זכאים לתואר.

אם כן, מספר הזכאים לתואר ראשון יכול להיות בין 165 ל-215. לכן התשובה הנכונה היא (4).

5. מפעל העובד בקצב קבוע מייצר 20 מכונות ב-4 ימים. כמה מכונות אפשר לייצר ב-3 מפעלים כאלה, העובדים באותו הקצב, ב-6 ימים?

120 (4)

90 (3)

80 (2)

60 (1)

שאלה זו היא שאלת הספק. אחת הדרכים לפתור שאלות מסוג זה היא למצוא את ההספק של יחידת תפוקה אחת (במקרה זה, מפעל אחד) ליחידת זמן אחת (במקרה זה, יום אחד), ואז להכפיל במספר יחידות התפוקה (3 מפעלים) ובמספר יחידות הזמן (6 ימים) המבוקשות. אם מפעל מייצר 20 מכונות ב-4 ימים, בכל יום הוא מייצר 5 מכונות ($\frac{20}{4} = 5$). לכן, 3 מפעלים מייצרים ב-6 ימים $5 \cdot 3 \cdot 6$ מכונות, כלומר 90 מכונות, והתשובה הנכונה היא (3).

6. בקופסה היו 20 כובעים לבנים ו-13 כובעים שחורים. יעקב הוציא מהקופסה באקראי 3 כובעים בזה אחר זה, בלי להחזירם לקופסה, ושלושתם היו שחורים. מה ההסתברות שגם הכובע הרביעי שיוציא באקראי יהיה שחור?

$\frac{1}{33}$ (4)

$\frac{1}{3}$ (3)

$\frac{10}{33}$ (2)

$\frac{13}{33}$ (1)

יש לחשב את ההסתברות שיעקב יוציא כובע שחור, לאחר שכבר הוציא שלושה כובעים שחורים. ההסתברות לכך היא מספר הכובעים השחורים שנותרו בקופסה חלקי סך כל הכובעים (שחורים ולבנים) שנותרו בקופסה. לאחר שהוצאו שלושה כובעים שחורים, נותרו בקופסה 10 כובעים שחורים ו-20 כובעים לבנים, כלומר: מתוך 30 הכובעים שבקופסה 10 הם שחורים. לכן, ההסתברות שיעקב יוציא כעת כובע שחור היא $\frac{10}{30} = \frac{1}{3}$, והתשובה הנכונה היא (3).

שאלות אלגברה לא מילוליות

1. נתון: $2^x \cdot 2^y = 32$

$x + y = ?$

(1) 8

(2) 7

(3) 5

(4) 4

לפי חוקי החזקות, במכפלה של חזקות בעלות אותו בסיס אפשר לחבר את המעריכים, לכן $2^x \cdot 2^y = 2^{x+y}$ ולכן לפי הנתון $2^{x+y} = 32$. כדי שנוכל למצוא את ערך הביטוי $x + y$, נבטא את 32 כחזקה שבסיסה 2: $32 = 2^5$. מכאן ש- $2^{x+y} = 2^5$. כאשר שתי חזקות הן שוות ובעלות אותו בסיס, גם המעריכים שלהן שווים, ולכן $x + y = 5$. התשובה הנכונה היא (3).

2. הממוצע של שלושת המספרים x, y ו- z הוא $x \cdot y$.

$z = ?$

(1) $3 \cdot x \cdot y - x - y$

(2) $x \cdot y - x - y$

(3) $3 \cdot x \cdot y + x + y$

(4) $3 \cdot x \cdot y - (x - y)$

ממוצע הוא סכום האיברים חלקי מספרם, ולכן הממוצע של x, y ו- z הוא $\frac{x+y+z}{3}$. נציב במשוואה את נתוני השאלה: $\frac{x+y+z}{3} = x \cdot y$; נכפיל את שני האגפים ב-3: $x + y + z = 3 \cdot x \cdot y$ ונבודד את z : $z = 3 \cdot x \cdot y - x - y$. לכן התשובה הנכונה היא (1).

3. לכל שני מספרים a ו- b הוגדרה הפעולה $\$(a, b)$ כך:

$\$(a, b) = a \cdot (a + b)$

$\$(\$(2, 0), 1) = ?$

(4) 4

(3) 10

(2) 12

(1) 20

בביטוי $\$(\$(2, 0), 1)$, שאת ערכו יש למצוא, $a = \$(2, 0)$, $b = 1$. לפי הגדרת הפעולה: $\$(\$(2, 0), 1) = \$(2, 0) \cdot (\$(2, 0) + 1)$. אם כן, כדי לחשב את ערך הביטוי המבוקש יש לחשב תחילה את $\$(2, 0)$. לפי הגדרת הפעולה: $\$(2, 0) = 2 \cdot (2 + 0) = 4$. נציב את הערך שקיבלנו עבור $\$(2, 0)$ בביטוי המבוקש ונקבל: $\$(\$(2, 0), 1) = \$(4, 1) = 4 \cdot (4 + 1) = 20$. לפי הגדרת הפעולה: $\$(4, 1) = 4 \cdot (4 + 1) = 20$, והתשובה הנכונה היא (1).

4. נתון: $B < C$

$$B < D < A$$

איזו מן האפשרויות הבאות נכונה בהכרח?

(1) $C < D$

(2) $D < C$

(3) $C < A$

(4) אף אחת מהאפשרויות הנ"ל אינה בהכרח נכונה

מהנתונים אי-אפשר להסיק דבר בנוגע ליחס הגדלים בין C ל-A ול-D. שלושה מצבים אפשריים לפי הנתונים:

א. $B < C < D < A$

ב. $B < D < C < A$

ג. $B < D < A < C$

אפשרות (1) נכונה במצב א', אך לא במצבים ב' ו-ג'. אפשרות (2) נכונה במצבים ב' ו-ג', אך לא במצב א'. אפשרות (3) נכונה במצבים א' ו-ב', אך לא במצב ג'. אם כן, כל אחת מהאפשרויות עשויה להיות נכונה במצבים מסוימים, ועשויה להיות שגויה במצבים אחרים. לכן אף אחת מהאפשרויות (1)–(3) אינה **בהכרח** נכונה, והתשובה הנכונה היא (4).

5. K הוא מספר זוגי, ו-P הוא מספר אי-זוגי.

איזו מן הטענות הבאות **אינה** נכונה?

(1) $P - K - 1$ הוא מספר אי-זוגי

(2) $P + K + 1$ הוא מספר זוגי

(3) $P \cdot K + P$ הוא מספר אי-זוגי

(4) $P^2 + K^2 + 1$ הוא מספר זוגי

נבדוק כל אחת מהטענות:

(1) ההפרש בין מספר אי-זוגי (P) למספר זוגי (K) הוא מספר אי-זוגי, ולכן $P - K - 1$ הוא מספר אי-זוגי. אם נפחית 1 מהמספר האי-זוגי שהתקבל, נקבל מספר זוגי. לכן $P - K - 1$ הוא מספר **זוגי**, והטענה **אינה** נכונה.

(2) סכום של מספר אי-זוגי (P) ומספר זוגי (K) הוא מספר אי-זוגי, ולכן $P + K$ הוא מספר אי-זוגי. אם נוסיף 1 למספר האי-זוגי שהתקבל, נקבל מספר זוגי. לכן $P + K + 1$ הוא מספר **זוגי**, והטענה **נכונה**.

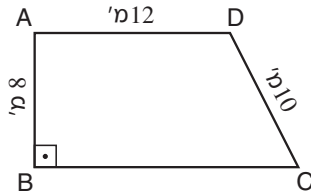
(3) מכפלה של מספר זוגי במספר שלם כלשהו היא זוגית, לכן המכפלה $P \cdot K$ היא מספר זוגי. אם נוסיף למכפלה הזוגית שהתקבלה את המספר האי-זוגי P, נקבל מספר אי-זוגי. לכן $P \cdot K + P$ הוא מספר **אי-זוגי**, והטענה **נכונה**.

(4) ריבוע של מספר אי-זוגי (P^2) הוא מספר אי-זוגי, כי הוא מכפלה של מספר אי-זוגי במספר אי-זוגי ($P \cdot P$), וריבוע של מספר זוגי (K^2) הוא מספר זוגי, כי הוא מכפלה של מספר זוגי במספר זוגי ($K \cdot K$). סכום שני הריבועים ($P^2 + K^2$) הוא אי-זוגי כי הוא סכום של מספר אי-זוגי ומספר זוגי, ולכן, כשנוסיף לו 1 נקבל מספר זוגי. $P^2 + K^2 + 1$ הוא אפוא מספר **זוגי**, והטענה **נכונה**.

בשאלה זו יש לסמן את הטענה שאינה נכונה, ולכן (1) היא התשובה הנכונה.

שאלות גאומטריה

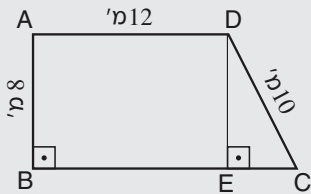
1. בסרטוט שלפניכם טרפז ישר-זווית ($AD \parallel BC$).



לפי נתונים אלה והנתונים שבסרטוט, מה שטח הטרפז (במ"ר)?

- (1) 150
- (2) 120
- (3) 108
- (4) 96

הנוסחה לחישוב שטח טרפז שבסיסו האחד a , בסיסו האחר b וגובהו h היא: $S = \frac{(a+b) \cdot h}{2}$.
 הטרפז הנתון הוא ישר-זווית ולכן השוק המאונכת לבסיסים שווה לגובה הטרפז. בסרטוט נתונים הגובה ואורך הבסיס הקטן אך לא נתון אורך הבסיס הגדול. כדי לחשב את אורך הבסיס הגדול נוריד אנך מהנקודה D לבסיס BC (בסרטוט להלן). מתקבל מלבן $ABED$ שאורכו 12 מ' ורוחבו 8 מ', ולכן $BE = 12$, $DE = 8$.
 כדי למצוא את אורך הבסיס הגדול של הטרפז נותר רק לחשב את אורכו של EC . אפשר לעשות זאת בעזרת משפט פיתגורס. במשולש ישר-הזווית DEC : $DC^2 = DE^2 + EC^2$.



נבודד את EC : $EC = \sqrt{DC^2 - DE^2}$

נציב את הנתונים: $EC = \sqrt{10^2 - 8^2} = 6$

אם כן, אורך הבסיס הגדול הוא 18 מ' ($6 + 12$ מ').

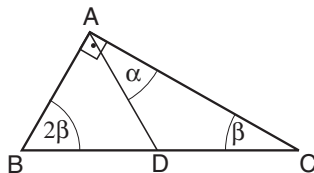
נחשב את שטח הטרפז: $S = \frac{(12 + 18) \cdot 8}{2} = 120$

אם כן, שטח הטרפז הוא 120 מ"ר, והתשובה הנכונה היא (2).

2. בסרטוט שלפניכם ABC הוא משולש ישר-זווית

ו- ABD הוא משולש שווה-שוקיים ($AB = AD$).

לפי נתונים אלה והנתונים שבסרטוט, $\alpha = ?$



- (1) 60°
- (2) 45°
- (3) 30°
- (4) 25°

סכום הזוויות במשולש הוא 180° . לכן, במשולש ABC מתקיים $90^\circ + 2\beta + \beta = 180^\circ$.
 נפתור את המשוואה ונקבל $\beta = 30^\circ$.

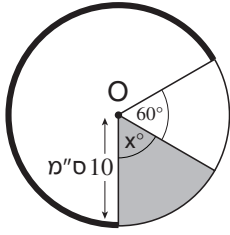
נתון כי המשולש ABD הוא שווה-שוקיים. מכך נובע כי $\angle ABD = \angle ADB$.

$\angle ABD = 2\beta = 60^\circ$ ולכן גם $\angle ADB = 60^\circ$.

במשולש ABD מתקיים $\angle BAD + \angle ABD + \angle ADB = 180^\circ$, כלומר $\angle BAD = 180^\circ - \angle ABD - \angle ADB$.

נציב את ערכי הזוויות שכבר חישבנו ונקבל $\angle BAD = 180^\circ - 60^\circ - 60^\circ = 60^\circ$.

לפי הסרטוט, $\angle BAC = \angle BAD + \alpha$. נציב את ערכי הזוויות הידועות ונקבל $60^\circ + \alpha = 90^\circ$. לכן $\alpha = 30^\circ$, והתשובה הנכונה היא (3).



3. בסרטוט שלפניכם מעגל שמרכזו O ורדיוסו 10 ס"מ. נתון: השטח הכהה שווה ל- $\frac{1}{6}$ משטח המעגל.

לפי נתונים אלה והנתונים שבסרטוט, מה אורך הקשת המודגשת (בס"מ)?

20π (4)

$\frac{20\pi}{3}$ (3)

$\frac{40\pi}{3}$ (2)

30π (1)

אורך הקשת המודגשת שווה להיקף המעגל כולו, פחות אורך הקשת שאינה מודגשת. כדי למצוא את אורכה של הקשת שאינה מודגשת, יש למצוא את גודל הזווית המרכזית שנשענת עליה. גודל זווית זו הוא $60^\circ + x^\circ$ (כפי שנתון בסרטוט). x היא זווית הראש של הגזרה הכהה, ואת גודלה אפשר למצוא בעזרת הנוסחה לחישוב שטח גזרת מעגל:

$$\pi r^2 \cdot \frac{x}{360}$$

נתון ששטח הגזרה הכהה שווה ל- $\frac{1}{6}$ משטח המעגל, כלומר ל- $\frac{\pi r^2}{6}$ (שהרי שטח המעגל כולו שווה ל- πr^2), ולכן נקבל את המשוואה $\pi r^2 \cdot \frac{x}{360} = \frac{\pi r^2}{6}$. נצמצם את שני האגפים ב- πr^2 : $\frac{x}{360} = \frac{1}{6}$, ונבודד את x : $x = \frac{360}{6} = 60$. אם כן, גודל הזווית המרכזית שעליה נשענת הקשת שאינה מודגשת הוא $60^\circ + 60^\circ = 120^\circ$, ואורך הקשת הנשענת על זווית זו הוא $2\pi r \cdot \frac{120}{360} = 2\pi r \cdot \frac{1}{3}$, כלומר $\frac{1}{3}$ מהיקף המעגל. לכן, אורך הקשת המודגשת הוא $\frac{2}{3}$ מהיקף המעגל.

היקף המעגל (בס"מ) הוא $2\pi r = 2\pi \cdot 10 = 20\pi$ ולכן $\frac{2}{3} \cdot 20\pi = \frac{40\pi}{3}$ מהיקף המעגל הוא $\frac{40\pi}{3}$. כלומר, אורך הקשת המודגשת הוא $\frac{40\pi}{3}$ ס"מ, והתשובה הנכונה היא (2).

4. המרחק בין הנקודות A ו-B הוא 400 מטר. המרחק בין הנקודות B ו-C הוא 300 מטר. מכאן נובע שהמרחק בין הנקודות A ו-C הוא **בהכרח** -

(4) אי-אפשר לדעת לפי הנתונים

(3) 700 מטר

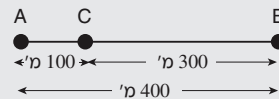
(2) 500 מטר

(1) 100 מטר

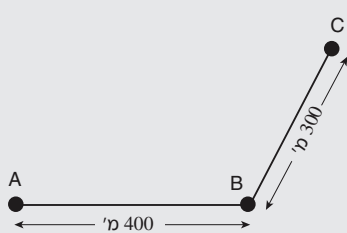
הנתונים בשאלה זו אינם מספקים מידע בנוגע למקומו היחסי של שלוש הנקודות, וייתכנו מצבים רבים, כמו:



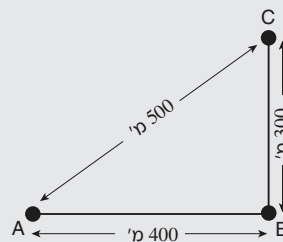
מתאים לתשובה (3)



מתאים לתשובה (1)



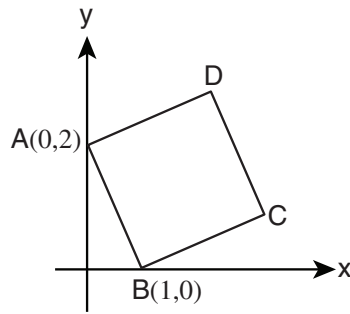
לא מתאים לאף אחת מהתשובות (1)-(3)



מתאים לתשובה (2)

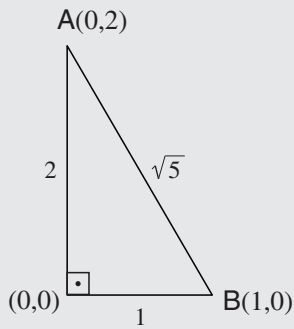
כל המצבים האלה ייתכנו, וכן מצבים רבים אחרים, אך אף אחד מהם אינו מתקיים בהכרח. לכן התשובה הנכונה היא (4).

5. במערכת הצירים שלפניכם נתון ריבוע ABCD.



מה שטח הריבוע?

- (1) אי-אפשר לדעת לפי הנתונים
- (2) 6
- (3) 5
- (4) 4



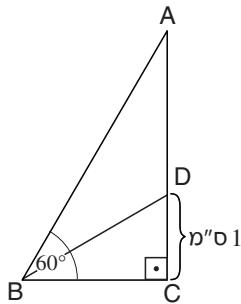
כדי לחשב את שטח הריבוע יש למצוא את אורך הצלע שלו. אורך הצלע הוא המרחק בין כל שני קדקודים סמוכים, למשל A ו-B. מכיוון שהקטע AB אינו מקביל לאף אחד מהצירים, נחשב את אורכו בעזרת משפט פיתגורס.

ראשית הצירים והנקודות A ו-B יוצרים משולש ישר זווית ש-AB הוא היתר בו. אורך הניצב האחד הוא המרחק בין ראשית הצירים (0, 0) לנקודה A(0, 2), כלומר 2, ואורך הניצב האחר הוא המרחק בין ראשית הצירים (0, 0) לנקודה B(1, 0), כלומר 1.

לפי משפט פיתגורס, אורך היתר AB הוא $\sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{4 + 1} = \sqrt{5}$.

אם כן, אורך צלע הריבוע הוא $\sqrt{5}$, ומכאן ששטח הריבוע הוא $(\sqrt{5})^2 = 5$. לכן התשובה הנכונה היא (3).

6. בסרטוט שלפניכם ABC הוא משולש ישר-זווית. BD חוצה את הזווית $\angle ABC$.



לפי נתונים אלה והנתונים שבסרטוט, AD = ?

- (1) 1 ס"מ
- (2) 2 ס"מ
- (3) $\sqrt{3}$ ס"מ
- (4) $\frac{4}{\sqrt{3}}$ ס"מ

סכום הזוויות במשולש הוא 180° ולכן $\angle BAD = 30^\circ$. מהנתון ש-BD חוצה את הזווית $\angle ABC$ נובע ש- $\angle ABD = \angle CBD = 30^\circ$. במשולש ADB, $\angle BAD = \angle ABD = 30^\circ$, ולכן ADB הוא משולש שווה-שוקיים שבו $AD = BD$. BD הוא גם יתר במשולש BDC. משולש זה הוא משולש $30^\circ - 60^\circ - 90^\circ$, ולכן $BD = 2 \cdot CD = 2 \cdot 1 = 2$ ס"מ. גם $AD = BD = 2$ ס"מ והתשובה הנכונה היא (2).

7. נוזל הממלא תיבה שממדיה הם 2 ס"מ x 10 ס"מ x 20 ס"מ, נמזג כולו לכלי בצורת גליל שרדיוס בסיסו 5 ס"מ.

עד איזה גובה (בס"מ) יגיעו פני הנוזל בכלי הגלילי?

- (1) $\frac{16}{\pi}$ (2) $\frac{40}{\pi}$ (3) 8π (4) 8

נפח תיבה הוא מכפלת שלושת ממדיה, ולכן נפח הנוזל בתיבה הוא $2 \cdot 10 \cdot 20$ סמ"ק, כלומר 400 סמ"ק. לאחר מזיגתו לכלי שצורתו גליל, נפח הנוזל נשאר כשהיה. כעת יש למצוא מה יהיה גובהו של גליל שרדיוס בסיסו 5 ס"מ ונפחו 400 סמ"ק – גובה זה הוא הגובה שאליו יגיע הנוזל בגליל.

הנוסחה לנפח גליל היא $V = \pi r^2 \cdot h$, ויש למצוא את h כאשר $r = 5$ ס"מ, $V = 400$ סמ"ק.

נציב את הנתונים בנוסחה לחישוב הנפח: $400 = \pi \cdot 5^2 \cdot h = \pi \cdot 25 \cdot h$

כדי לבודד את h נחלק את שני האגפים ב- 25π ונקבל $h = \frac{400}{25\pi} = \frac{16}{\pi}$, והתשובה הנכונה היא (1).

שאלות הסקה מתרשים או מטבלה

השאלות האלה עוסקות במידע הניתן בתרשים או בטבלה. בדרך כלל התרשים או הטבלה מלווים בהסבר קצר. בטבלה מוצגים נתונים המסודרים בעמודות ובשורות. בתרשים הנתונים מוצגים בצורה גרפית כלשהי – בגרף, בדיאגרמת עמודות וכו'. לפניכם תרשים וטבלה לדוגמה, ואחרי כל אחד מהם כמה שאלות המלוות בהסברים.

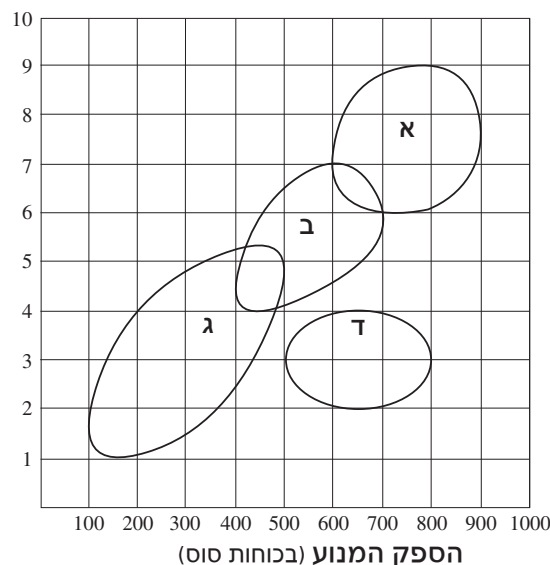
הסקה מתרשים

עיינו היטב בתרשים שלפניכם, וענו על השאלות שאחרי.

בתרשים נתונים על ארבע טכנולוגיות שונות לייצור מנוע מסוים. כל טכנולוגיה מסומנת באות ('א'-'ד') ומיוצגת בתרשים על ידי מתחם סגור. כל נקודה במתחם מייצגת את ההספק והמחיר של מנוע שאפשר לייצר בטכנולוגיה המתאימה. לדוגמה, בטכנולוגיה 'א' אפשר לייצר מנוע שהספקו 750 כוחות סוס במחיר של 8,500 דולר, אך אי-אפשר לייצר מנוע בעל אותו ההספק במחיר של 5,000 דולר.

הערה: לטכנולוגיות 'א' ו-'ב' יש תחום המשותף לשתייהן, וכך גם לטכנולוגיות 'ב' ו-'ג'.

מחיר המנוע
(באלפי דולרים)



שימו לב: בתשובתכם לכל שאלה, התעלמו מנתונים המופיעים בשאלות האחרות.

השאלות ופתרון:

1. מה טווח ההספקים (בכוחות סוס) של המנועים שאפשר לייצר גם בטכנולוגיה א' וגם בטכנולוגיה ב'?

- (1) 500-400
- (2) 600-500
- (3) 700-600
- (4) אף לא אחת מהאפשרויות הנ"ל

מחיר המנוע (באלפי דולרים)

סרטוט I

הספק המנוע (בכוחות סוס)

כדי לפתור שאלות הסקה מתרשים יש "לתרגם" את השאלה למונחים של התרשים, ולמצוא בתרשים את המידע הדרוש. השאלה עוסקת במנועים שאפשר לייצר גם בטכנולוגיה א' וגם בטכנולוגיה ב'. מנועים כאלה מיוצגים בתרשים על ידי השטח המשותף למתחמים המייצגים את שתי הטכנולוגיות (השטח הכהה בסרטוט I). כעת יש למצוא את טווח ההספקים של המנועים האלה. גבולותיו של השטח הכהה ביחס לציר האופקי מייצגים את טווח הספקי המנועים שאפשר לייצר בשתי הטכנולוגיות. כפי שאפשר לראות בסרטוט, הגבולות הם בין 600 ל-700 כוחות סוס, כלומר טווח ההספקים של המנועים שאפשר לייצר גם בטכנולוגיה א' וגם בטכנולוגיה ב' הוא 700-600 כוחות סוס, והתשובה הנכונה היא (3).

2. מה המחיר הנמוך ביותר שבו אפשר לייצר מנוע בעל הספק של 650 כוחות סוס?

- (1) 1,000 דולרים
- (2) 2,000 דולרים
- (3) 1,500 דולרים
- (4) 2,500 דולרים

מחיר המנוע (באלפי דולרים)

סרטוט II

הספק המנוע (בכוחות סוס)

בשאלה זו נקודת המוצא היא מנוע בעל הספק של 650 כוחות סוס. ההספקים מיוצגים בתרשים על הציר האופקי, לכן בשלב ראשון יש למצוא על הציר האופקי את הספק המנוע הרצוי, ובשלב שני יש למצוא את המחיר הנמוך ביותר של מנוע בעל הספק זה. נמתח קו אנכי מהנקודה על הציר האופקי המייצגת הספק של 650 כוחות סוס עד שהוא ייגע באחד מהמתחמים (ראו סרטוט II). נקודת מגע זו היא הנקודה המייצגת את המחיר הנמוך ביותר של מנוע בעל הספק של 650 כוחות סוס. נקודת המגע הנמוכה ביותר היא על גבול המתחם של טכנולוגיה ד', והיא מייצגת מחיר של 2,000 דולר ולכן זה המחיר הנמוך ביותר של מנוע בעל ההספק המבוקש. אם כן, התשובה הנכונה היא (2).

3. בחברה אחת המייצרת מנועים הוחלט להפסיק את השימוש בטכנולוגיה ג'.
מה יהיה ההספק הנמוך ביותר (בכוחות סוס) של מנוע שמחירו 3,000 דולר שהחברה תוכל לייצר לאחר יישום ההחלטה?

- (1) 500
- (2) 400
- (3) 300
- (4) אי-אפשר לייצר מנוע כזה

סרטוט III

מחיר המנוע (באלפי דולרים)

הספק המנוע (בכוחות סוס)

מכיוון שנאמר בשאלה שהחברה תפסיק להשתמש בטכנולוגיה ג', נתעלם מהמתחם של טכנולוגיה זו, ונתייחס רק למתחמים האחרים (השטחים הכהים בסרטוט III). בשאלה זו נקודת המוצא היא מנוע שמחירו 3,000 דולר. מחירי המנועים מוצגים בתרשים על הציר האנכי, ולכן יש למצוא תחילה את הנקודה על הציר האנכי המייצגת מחיר של 3,000 דולר. ככל שנתקדם מנקודה זו ימינה כך יעלה ההספק, ולכן אם נמתח קו אופקי מנקודה זו (ראו סרטוט III), נקודת המגע הראשונה של הקו עם אחד מהמתחמים תייצג את ההספק הנמוך ביותר של מנוע שמחירו 3,000 דולר. נקודת המגע הראשונה היא עם המתחם של טכנולוגיה ד'. נקודה זו נמצאת על הקו האנכי המתאים ל-500 כוחות סוס בציר האופקי, וזה ההספק הנמוך ביותר של מנוע שמחירו 3,000 דולר. לכן התשובה הנכונה היא (1).

4. לחברה מסוימת אסור לייצר מנועים שהספקם גבוה מ-550 או שווה ל-550 כוחות סוס. באילו טכנולוגיות החברה יכולה להשתמש כדי לייצר את מנועיה?

- (1) ג' בלבד
- (2) ב' ו-ג' בלבד
- (3) ג' ו-ד' בלבד
- (4) ב', ג' ו-ד' בלבד

סרטוט IV

מחיר המנוע (באלפי דולרים)

הספק המנוע (בכוחות סוס)

נקודת המוצא היא מנוע שהספקו 550 כוחות סוס. נמצא את הנקודה המייצגת הספק זה על הציר האופקי, ונמתח ממנה קו אנכי לכל גובה התרשים (ראו סרטוט IV). כל המנועים שמימין לקו זה הם בעלי הספק גבוה מ-550 כוחות סוס, וכל המנועים שמשמאל לקו הם בעלי הספק נמוך מ-550 כוחות סוס. לחברה הנזכרת בשאלה מותר לייצר רק מנועים שהספקם נמוך מ-550 כוחות סוס, לכן היא יכולה להשתמש רק בטכנולוגיות שהמתחם שלהן או חלק ממנו נמצא **משמאל** לקו (השטחים הכהים בסרטוט IV). משמאל לקו נמצא כל המתחם של טכנולוגיה ג', חלק מהמתחם של טכנולוגיה ב', וחלק מהמתחם של טכנולוגיה ד'. לכן, החברה יכולה להשתמש בטכנולוגיות ב', ג' ו-ד' לשם ייצור מנועים שהספקם נמוך מ-550 כוחות סוס, והתשובה הנכונה היא (4).

הסקה מטבלה

עיינו היטב בטבלה שלפניכם, וענו על השאלות שאחריה.

בטבלה מוצגים נתונים של 10 חברות העוסקות בענפים שונים. החברות מסומנות באותיות A עד J. לכל חברה מצוינים: הענף שבו היא עוסקת, נתונים על היקף המכירות שלה, נתונים על הרווחים שלה בשנה הנוכחית, ערך נכסיה ומספר עובדיה.

לדוגמה: חברה E עוסקת בענף האלקטרוניקה, מועסקים בה 400,000 עובדים וערך נכסיה 90 מיליון דולרים. היקף המכירות של החברה הסתכם ב-70 מיליארד דולרים בשנה הנוכחית (שהם 9% יותר ממכירותיה בשנה שעברה), והיא רוויחה 6,000 מיליון דולרים (שהם 60% יותר מרווחיה בשנה שעברה).
דוגמה לחישוב אחוז השינוי: אם מכירות של חברה מסוימת היו 40 מיליארד דולרים בשנה שעברה, והשנה הן עלו ל-50 מיליארד דולרים, אחוז השינוי בהשוואה לשנה שעברה הוא 25% $\left(\frac{50-40}{40} \cdot 100\right)$.

מספר עובדים (באלפים)	ערך נכסים (במיליוני דולרים)	רווחים		מכירות		הענף	החברה
		אחוז השינוי בהשוואה לשנה שעברה	רווחים (במיליוני דולרים)	אחוז השינוי בהשוואה לשנה שעברה	מכירות (במיליארדי דולרים)		
750	180	-150%	-2,000	-1.5%	125	רכב	A
150	100	0%	6,500	25%	110	נפט	B
100	390	40%	5,000	22%	105	נפט	C
350	180	-80%	900	1.5%	100	רכב	D
400	90	60%	6,000	9%	70	אלקטרוניקה	E
100	55	15%	3,000	7%	65	רכב	F
400	אין נתונים	-20%	1,000	25%	60	מתכות	G
120	60	-15%	3,000	20%	60	נפט	H
70	40	7%	2,000	15%	55	נפט	I
300	150	10%	4,500	6%	50	אלקטרוניקה	J

שימו לב: בתשובתכם לכל שאלה, התעלמו מנתונים המופיעים בשאלות האחרות.

השאלות ופתרון:

1. איזו מהחברות העוסקות בענף הרכב היא בעלת ערך הנכסים הנמוך ביותר?

A וגם D (4)

F (3)

D (2)

A (1)

בטור השני מימין מצוין הענף שבו עוסקת כל חברה. אפשר לראות שהחברות A, D ו-F הן החברות היחידות העוסקות בענף הרכב. נבדוק את ערך הנכסים (בטור השני משמאל) של כל אחת מהחברות האלה: ערך נכסיה של חברה A הוא 180 מיליון דולרים, וזה גם ערך נכסיה של חברה D. ערך נכסיה של חברה F הוא 55 מיליון דולרים, לכן חברה F היא בעלת ערך הנכסים הנמוך ביותר בענף הרכב. התשובה הנכונה היא (3).

2. בהנחה שהרווחים מתחלקים שווה בשווה בין כל העובדים בחברה, באיזו מהחברות הבאות הרווח לעובד יחיד הוא הגדול ביותר?

- F (4) C (3) B (2) H (1)

הרווח לעובד יחיד אינו מצוין בטבלה במפורש, אך אפשר לחשב אותו מתוך הנתונים המופיעים בה. בטבלה נתונים הרווח של כל חברה וכן מספר העובדים בה. הרווח לעובד יחיד בחברה מסוימת הוא הרווח של החברה מחולק במספר העובדים בה. בכל החברות הרווח נתון במיליוני דולרים ומספר העובדים נתון באלפים, ולכן כדי להשוות בין החברות אפשר להתייחס רק לערכים המספריים המופיעים בטבלה, ולהציג את הרווח לעובד יחיד באופן הבא:

F	C	B	H
$\frac{3,000}{100}$	$\frac{5,000}{100}$	$\frac{6,500}{150}$	$\frac{3,000}{120}$

כמובן, אפשר לחשב את הרווח לעובד ולמצוא באיזו חברה מתקבל הערך הגדול ביותר, אבל אפשר להשוות בין הביטויים גם בלי לחשב אותם: לחברות F ו-H אותו הרווח (3,000) אך בחברה F הוא מתחלק בין פחות עובדים ($100 < 120$), ולכן הרווח לעובד בחברה F גדול יותר. מספר העובדים בחברות C ו-F שווה (100), אך הרווח של חברה C גדול יותר ($3,000 < 5,000$), ולכן הרווח לעובד בחברה C גדול יותר. החברות B ו-C שונות זו מזו גם מבחינת מספר העובדים וגם מבחינת הרווח שלהן. בחברה B מספר העובדים גדול פי 1.5 מבחברה C (150 לעומת 100); אילו היה גם הרווח של חברה B גדול פי 1.5 מהרווח של חברה C, כלומר אילו הרווח בחברה B היה $5,000 \cdot 1.5 = 7,500$, היה הרווח לעובד יחיד שווה בשתי החברות. אבל הרווח של חברה B קטן מסכום זה ($6,500 < 7,500$), ולכן הרווח לעובד בחברה B קטן מהרווח לעובד בחברה C. אם כן, הרווח הגדול ביותר לעובד יחיד הוא בחברה C, והתשובה הנכונה היא (3).

כמובן, אפשר לחשב את הרווח לעובד יחיד בחברות B ו-C:

הרווח לעובד יחיד בחברה C שווה ל-50 ($\frac{5,000}{100} = 50$) ובחברה B הרווח לעובד יחיד קטן מ-50 ($\frac{6,500}{150} < 50$). ולכן הרווח לעובד יחיד בחברה C גדול יותר.

3. מה היה היקף המכירות של חברה G בשנה שעברה (במיליארדי דולרים)?

- 76 (4) 64 (3) 50 (2) 48 (1)

היקף המכירות בשנה שעברה אינו מצוין בטבלה, אך אפשר לחשב אותו בעזרת היקף המכירות בשנה הנוכחית ואחוז השינוי בהשוואה לשנה שעברה. אפשר לראות בטבלה כי חברה G מכרה השנה בסכום של 60 מיליארד דולרים, ומכירותיה עלו ב-25% לעומת השנה שעברה. כלומר, היקף מכירותיה בשנה שעברה הוא ערך שאם נוסיף לו 25% נקבל 60 מיליארד. נסמן ב-x את היקף המכירות בשנה שעברה ונבטא את הנתונים במשוואה:

$$x + \frac{25}{100} \cdot x = 60$$

נפשט את המשוואה: $\frac{125}{100} \cdot x = 60$, ונבודד את x: $x = 60 \cdot \frac{100}{125} = 60 \cdot \frac{4}{5} = 48$.

היקף המכירות של חברה G בשנה שעברה היה אפוא 48 מיליארד דולרים, והתשובה הנכונה היא (1).

