تفكير كمّي

في هذا المجال تُفحص القدرة على استعمال أرقام ومصطلحات رياضية لحلّ مسائل كمّيّة، والقدرة على تحليل مُعطيات معروضة بأشكال مختلفة، مثل رسوم بيانيّة وجداول. المعرفة المطلوبة في الرّياضيّات هي بمستوى أساسيّ (المادّة الّتي تُدَرّس حتّى الصّفوف التّاسعة – العاشرة في معظم المدارس في البلاد).

كلّ الأسئلة في هذا المجال هي من صنف متعدّدة–الخيارات: كل سؤال تليه أربع إمكانيّات إجابة، وفقط واحدة منها صحيحة.

في فصل التّفكير الكمّي، تُرجمَت بعض المصطلحات الرّياضيّة إلى اللّغة العبريّة. تظهر التّرجمة (بين قوسين) مباشرةً بعد المصطلح الرّياضيّ بالعربيّة.

في فصل التّفكير الكمّي تظهر أسئلة من نوعين: مسائل رياضيّة، وأسئلة استنتاج من رسم بيانيّ أو من جدول.

مسائل رياضيّة تعالج هذه الأسئلة عدّة مواضيع من مجالات الجبر والهندسة. بعض الأسئلة تُعرض بمصطلحات رياضيّة وبعض الأسئلة هي مسائل كلاميّة والّتي يجب فيها أوّلاً ترجمة المسألة إلى مصطلحات رياضيّة.

أسئلة إستنتاج من رسم بيانيّ أو من جدول تُعالج هذه الأسئلة معلومات مبيّنة في رسم بيانيّ أو في جدول. تُعرض في الرّسم البيانيّ مُعطيات بصورة بيانيّة: في أعمدة، في خطوط، بالنّقاط المبعثرة وما إلى ذلك. تُعرَض المُعطيات في الجدول في أعمدة أو في سطور.

في كلّ صنف من الأسئلة تظهر الأسئلة عادة بترتيب صعوبة متصاعد: في البداية الأسئلة سهلة ويتطلّب حلّها وقتًا قصيرًا نسبيًّا، وتدريجيًّا تصبح الأسئلة صعبة اكثر ويتطلّب حلّها وقتًا أطول.

الرّسومات الّتي تُلحق ببعض الأسئلة ليست بالضّرورة مرسومة بموجب مقياس رسم: يجب عدم الاستنتاج عن طول قطعة، عن قيمة زاوية وما شابه ذلك حسب صورة الرّسم فقط. مع ذلك، عندما يظهر خطّ مستقيم، فيمكن الافتراض أنّه مستقيم حقًّا.

تظهر في بداية الفصل «صفحة قوانين» والّتي تشمل تعليمات، ملاحظات وقوانين مختلفة. يمكنك الاستعانة بها خلال الامتحان.
تظهر صفحة القوانين ايضًا في هذا الكرّاس (في الصّفحة التّاليّة) وفي فصول التّفكير الكمّيّ في امتحان التّجربة.
من المحبّذ التّعرّف جيّدًا على مضمون هذه الصّفحة والتّمكّن منه قبل الامتحان.

في الصّفحات 41–63 توجد مراجعة للمصطلحات الأساسيّة في الرّياضيّات الّتي تعكس إلى حدّ كبير الموادّ الّتي ترتكز عليها الأسئلة في مجال التّفكير الكمّيّ. مع ذلك، يمكن أن تظهر في الامتحان ذاته أسئلة يحتاج حلّها إلى معرفة مصطلحات ونظريّات رياضيّة إضافيّة لا تظهر في هذه الصّفحات.

في الصّفحات 69–83 توجد أمثلة لأنواع مختلفة من الأسئلة، ولكلّ سؤال مُرفق حلّ وشرح مفصّل.

صفحة قوانين

في هذا الفصل 20 سؤالاً.
الوقت المُخصّص 20 دقيقة.

تظهر في هذا الفصل أسئلة ومسائل في التّفكير الكمّيّ. لكلّ سؤال اقْتُرِحَت أربع إجابات.
عليك أن تختار الإجابة الصّحيحة وأن تشير إلى رقمها في المكان الملائم في صفحة الإجابات.

ملاحظات عامّة

* الرّسومات المرفقة ببعض الأسئلة هي للمساعدة على حلّها، لكنّها ليست بالضّرورة مرسومة بموجب مقياس رسم. يجب عدم الاستنتاج عن أطوال القطع، عن قيَم الزّوايا وعن ما شابه ذلك حسب صورة الرّسم فقط.
* إذا ظهرَ خطّ مستقيم في الرّسم، يمكن الافتراض أنّه مستقيم حقًّا.
* حينما يظهر في سؤال مصطلح هندسيّ (ضلع، نصف قطر، مساحة، حجم وإلخ) كمعطى، فالمقصود هو مصطلح قيمته أكبر من صفر، إلاّ إذا ذُكِرَ غير ذلك.
* عندما يظهر في السّؤال $\sqrt{a}$ $(0 < a)$، المقصود هو الجذر الموجب لـ a.
* 0 ليس عددًا موجبًا وليس عددًا سالبًا.
* 0 هو عدد زوجيّ.
* 1 ليس عددًا أوّليًّا.

قوانين

1. **النّسبة المئويّة:** $a\%$ من x هو $\frac{a}{100} \cdot x$

2. **القوى:** لكلّ عدد a يختلف عن الصّفر، ولكلّ n و m صحيحين –
   أ. $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ ب. $a^{m+n} = a^m \cdot a^n$
   جـ. $a^{\frac{n}{m}} = (\sqrt[m]{a})^n$ $(0 < m \text{ ، } 0 < a)$
   د. $a^{n \cdot m} = (a^n)^m$

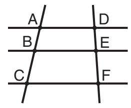
3. **ضرب مختصر:** $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$
   $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$

4. الزّمن = $\frac{\text{المسافة}}{\text{السّرعة}}$

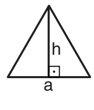
5. القدرة = $\frac{\text{كمّيّة العمل}}{\text{الزّمن}}$

6. **مضروب العدد (עצרת):** $n! = n(n-1)(n-2) \cdot ... \cdot 2 \cdot 1$

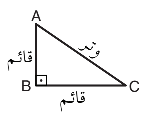
7. إذا كان $AD \parallel BE \parallel CF$
   إذن $\frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EF}$ وأيضًا $\frac{AB}{AC} = \frac{DE}{DF}$



8. **المثلّث:**
   أ. **مساحة** مثلّث طول قاعدته a وارتفاعه على هذه القاعدة h: $\frac{a \cdot h}{2}$

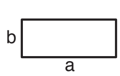


   ب. **نظريّة فيثاغورس:**
   في مثلّث قائم الزّاوية ABC كما يظهر في الرّسم، يتحقّق $AC^2 = AB^2 + BC^2$

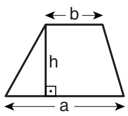


   جـ. في مثلّث قائم الزّاوية والّذي قيَم زواياه $90°$، $60°$، $30°$، طول القائم المقابل للزّاوية $30°$ يساوي نصف الوتر

9. **مساحة مستطيل** طوله a وعرضه b: $a \cdot b$

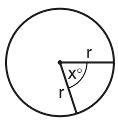


10. **مساحة شبه منحرف** طول إحدى قاعدتيه a، وطول القاعدة الأخرى b، وارتفاعه h: $\frac{(a+b) \cdot h}{2}$

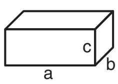


11. **زوايا داخليّة في مضلّع ذي n أضلاع:**
    أ. مجموع الزّوايا هو $(180n - 360)$ درجة
    ب. إذا كان المضلّع منتظم، **قيمة كلّ زاوية داخليّة** هي $\left(\frac{180n - 360}{n}\right) = \left(180 - \frac{360}{n}\right)$ درجة

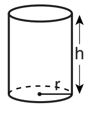
12. **الدّائرة:**
    أ. **مساحة** دائرة نصف قطرها r: πr^2 $(\pi = 3.14...)$
    ب. **محيط** الدّائرة هو $2\pi r$
    جـ. **مساحة قطاع دائرة** ذي زاوية رأس $x°$: $\pi r^2 \cdot \frac{x}{360}$



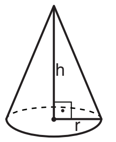
13. **الصّندوق، المكعّب:**
    أ. **حجم** صندوق طوله a، عرضه b، وارتفاعه c: $a \cdot b \cdot c$
    ب. **مساحة أوجه** الصّندوق: $2ab + 2bc + 2ac$
    جـ. **في المكعّب** يتحقّق $a = b = c$



14. **الأسطوانة:**
    أ. **مساحة غلاف** أسطوانة نصف قطر قاعدتها r وارتفاعها h: $2\pi r \cdot h$
    ب. **مساحة أوجه** الأسطوانة: $2\pi r^2 + 2\pi r \cdot h = 2\pi r(r + h)$
    جـ. **حجم** الأسطوانة: $\pi r^2 \cdot h$



15. **حجم مخروط** نصف قطر قاعدته r وارتفاعه h: $\frac{\pi r^2 \cdot h}{3}$



16. **حجم هرم** مساحة قاعدته S وارتفاعه h: $\frac{S \cdot h}{3}$

مراجعة مصطلحات أساسيّة في الرّياضيّات

إشارات

الإشارة	دلالتها
a ‖ b	المستقيمان a وb متوازيان
$a \perp b$	المستقيمان a وb متعامدان
⦜	زاوية °90، زاوية قائمة
$\sphericalangle ABC$	الزّاوية المحصورة بين القطعة AB والقطعة BC
$x = y$	x يساوي y
$x \neq y$	x لا يساوي y
$x < y$	x أصغر من y
$x \leq y$	x أصغر من y أو يساويه
$a < x , y$	أيضًا x وأيضًا y أكبر من a
$x = \pm a$	x يساوي a أو x يساوي (-a)
$\|x\|$	القيمة المطلقة لـ x
$x : y$	التّناسب بين x و y

أنواع الأعداد

عدد صحيح: هو عدد مكوّن من وحدات صحيحة. عدد صحيح يمكن أن يكون سالبًا، موجبًا أو صفراً.
مثلاً: ... ، 4 ، 3 ، 2 ، 1 ، 0 ، -1 ، -2 ، -3 ، -4 ، ...
إنتبه: الصّفر هو عدد صحيح ليس موجباً وليس سالباً.

عدد غير صحيح: هو عدد لا يمكن التّعبير عنه بوحدات صحيحة.
مثلاً: 1.37 ، $2\frac{1}{2}$ ، $-1\frac{1}{2}$ ، $\sqrt{2}$

أعداد متتالية: هي اعداد صحيحة يلي أحدها الآخر بفارق 1. مثلاً، 4 و 5 هما عددان متتاليان، 2، 3 و4 هي أعداد متتالية وكذلك (-3) و (-2) هما عددان متتاليان.
بشكلٍ عامّ، إذا كان n عددًا صحيحًا، فإنّ n و (n + 1) هما عددان متتاليان.
أو يمكن القول: (n + 1) هو متتالي n.

عدد زوجيّ: هو عدد صحيح، إذا قسمناه على 2 نحصل على عدد صحيح (أي أنّه ينقسم على 2 بدون باقٍ).
بشكلٍ عام، إذا كان n عددًا صحيحًا، فإنّ 2n هو عدد زوجيّ.
إنتبه: 0 هو عدد زوجيّ.

عدد فرديّ: هو عدد صحيح، إذا قسمناه على 2 نحصل على عدد غير صحيح (أي أنّه ينقسم على 2 مع باقٍ 1).
بشكلٍ عامّ، إذا كان n عددًا صحيحًا، فإنّ 2n+1 هو عدد فرديّ.

عدد أوّليّ: هو عدد صحيح وموجب ينقسم بدون باقٍ على عددين فقط: على نفسه وعلى 1.
مثلاً: 13 هو عدد أوّليّ لأنّه ينقسم بدون باقٍ على 13 وعلى 1 فقط.
إنتبه: 1 **غير** مُعرَّف كعدد أوّلي.

أعداد متضادّة: زوج أعداد حاصل جمعهما يساوي صفر.
مثال: 4 و (4-) هما عددان متضادّان.
وبشكل عامّ، a و $(-a)$ هما عددان متضادّان $(a + (-a) = 0)$، أو بكلمات أخرى، $(-a)$ هو العدد المضادّ لـ a.

أعداد مقلوبة: زوج أعداد حاصل ضربهما يساوي 1.

مثال: 3 و $\frac{1}{3}$ هما عددان مقلوبان، وكذلك أيضًا $\frac{2}{7}$ و $\frac{7}{2}$.

وبشكل عامّ، لكل $a, b \neq 0$:

a و $\frac{1}{a}$ هما عددان مقلوبان $\left(a \cdot \frac{1}{a} = 1\right)$، أو بكلمات أخرى، $\frac{1}{a}$ هو مقلوب a.

$\frac{a}{b}$ و $\frac{b}{a}$ هما عددان مقلوبان $\left(\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = 1\right)$، أو بكلمات أخرى، $\frac{b}{a}$ هو مقلوب $\frac{a}{b}$.

قيمة مُطلقة: إذا $x > 0$ إذن $|x| = x$،
إذا $x < 0$ إذن $|x| = -x$،
$|0| = 0$.

عمليّات حسابيّة في الأعداد الزّوجيّة والفرديّة (إقرأ من اليمين إلى اليسار)

زوجيّ	+	زوجيّ	=	زوجيّ
فرديّ	+	فرديّ	=	زوجيّ
فرديّ	+	زوجيّ	=	فرديّ
زوجيّ	–	زوجيّ	=	زوجيّ
فرديّ	–	فرديّ	=	زوجيّ
زوجيّ	–	فرديّ	=	فرديّ
فرديّ	–	زوجيّ	=	فرديّ
زوجيّ	×	زوجيّ	=	زوجيّ
فرديّ	×	فرديّ	=	فرديّ
فرديّ	×	زوجيّ	=	زوجيّ

لا توجد قواعد مشابهة تنطبق على عمليّات القسمة. مثلاً، خارج قسمة عددين زوجيّين قد يكون عددًا فرديًّا $\left(\frac{6}{2} = 3\right)$، زوجيًّا $\left(\frac{4}{2} = 2\right)$ أو عددًا غير صحيح $\left(\frac{6}{4} = 1\frac{1}{2}\right)$.

العوامل (القواسم) والمضاعفات

عامل (قاسم) لعدد صحيح وموجب x هو كلّ عدد صحيح وموجب ينقسم عليه x بدون باقٍ.
مثلاً، عوامل العدد 24 هي: 1، 2، 3، 4، 6، 8، 12 و 24.

عامل مشترك لـ x و y هو عدد يكون عاملاً لـ x وأيضًا عاملاً لـ y.
مثلاً، 6 هو عامل مشترك للعددين 24 و 30.

عامل أوّلي هو عامل وهو أيضًا عدد أوليّ. مثلاً، العوامل الاوّليّة للعدد 24 هي 2 و 3.
كلّ عدد صحيح وموجب (أكبر من 1) يمكن كتابته كعمليّة ضرب بين عوامل أوّليّة. مثلاً، $24 = 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 3 \cdot 2^3$.

المضاعَف لعَدَدٍ صحيح x هو كلّ عدد صحيح ينقسم على x بدون باقٍ. مثلاً، 16، 32 و 88 هي مضاعفات 8.

عندما يُذكر في السّؤال «ينقسم» فالقصد هو «ينقسم بدون باقٍ».

عمليّات حسابيّة في الكسور

الاختزال
عندما يكون للبسط وللمقام في كسرٍ، عامل مشترك، يمكن قسمة كل واحد منهما على العامل المشترك والحصول على كسر مساوٍ للكسر الأصلي، ذي بسط ومقام اصغر. مثلاً، اذا قسمنا بسط ومقام $\frac{16}{12}$ على 4 نحصل على $\frac{4}{3}$ $\left(\frac{16}{12} = \frac{4}{3}\right)$.

الضّرب
لكي نضرب كسرين يجب ضرب البسوط بعضها ببعض وكذلك المقامات بعضها ببعض.

مثال: $\frac{2}{3} \cdot \frac{5}{7} = \frac{2 \cdot 5}{3 \cdot 7} = \frac{10}{21}$

القسمة
لكي نقسم عددًا على كسر، يجب ضرب العدد بمقلوب الكسر المقسوم عليه.

مثال: $\dfrac{\frac{2}{5}}{\frac{3}{8}} = \frac{2}{5} \cdot \frac{8}{3} = \frac{2 \cdot 8}{5 \cdot 3} = \frac{16}{15}$

لكي تتمّ عمليّات ضرب أو قسمة بين عدد صحيح وكسر، يمكن اعتبار العدد الصّحيح كسرًا مقامُهُ 1. مثلاً، $2 = \frac{2}{1}$.

الجمع والطّرح
عندما نجمع أو نطرح كسورًا يجب تحويلها إلى كسور ذات مقام مشترك. **مقام مشترك** هو عدد ينقسم على مقام كلّ واحد من الكسور بدون باقٍ. بعد أن وجدنا عددًا ملائمًا ليكون مقامًا مشتركًا، يجب «ترجمة» كلّ واحد من الكسور إلى كسر ذي مقام مساوٍ للمقام المشترك. للوصول إلى ذلك، يجب ضرب بسط ومقام كلّ كسر بالعدد الصّحيح نفسه، بحيث نحصل في المقام على العدد الّذي تمّ اختياره ليكون المقام المشترك. بما أنّه تمّ ضرب البسط والمقام بالعدد نفسه، عمليًّا ضرب الكسر بـ 1 ولم تتغيّر قيمته. بعد «ترجمة» الكسور إلى كسور ذات مقام مشترك، يجب جمع أو طرح البسوط الجديدة الّتي حصلنا عليها واختزال النّتيجة إذا أمكن الأمر.

مثال

$\frac{3}{4}+\frac{1}{6}+\frac{5}{8}=?$

مقام مشترك ممكن هو 24، لأنه ينقسم على مقام كلّ كسر من الكسور بدون باقٍ:

$\frac{24}{4}=6$ ، $\frac{24}{6}=4$ ، $\frac{24}{8}=3$

«نترجم» كلّ واحد من الكسور إلى كسر ذات المقام المشترك هذا:

$\frac{3}{4}=\frac{18}{24}$ ، $\frac{1}{6}=\frac{4}{24}$ ، $\frac{5}{8}=\frac{15}{24}$

ونحصل على:

$$\frac{3}{4}+\frac{1}{6}+\frac{5}{8}=\frac{18}{24}+\frac{4}{24}+\frac{15}{24}=\frac{18+4+15}{24}=\frac{37}{24}$$

النّسب المئويّة

النّسب المئويّة هي حالة خاصّة من الكسور: $a\%$ من x هي $\frac{a}{100}\cdot x$.
في الأسئلة الّتي تظهر فيها نسب مئويّة، يجب ترجمة النّسب المئويّة إلى كسر مقامه 100 وحلّها مثل تمارين الكسور العاديّة.

مثال

كم يساوي 60 بالمئة من 80؟

نضع الكسر $\frac{60}{100}$ بدلاً من النّسبة المئويّة 60%، ونَحلّ مثل عمليّة ضرب عاديّة للكسور:

$$\frac{60}{100}\cdot 80=\frac{60\cdot 80}{100}=6\cdot 8=48$$

أي أنّ، 60% من 80 هي 48.

في الأسئلة المتعلّقة بتغيير في النّسب المئويّة المقصود هو النّسبة المئويّة من القيمة الأولى، إلاّ إذا ذُكر خلاف ذلك بصورة واضحة.

مثال

سعر غرض كلّفَ 80 شيكل إرتفع بـ 25%.
ما هو سعره الجديد؟
بما أنّه قد أُضيف 25% إلى الثّمن القديم، فإنّ الثّمن الجديد هو 125% من الثّمن القديم (25%+ 100%)، ولذلك يجب إيجاد كم تساوي 125% من 80.
نحوّل النّسبة المئويّة إلى كسر مئويّ، ونحلّ: $\frac{125}{100}\cdot 80=100$
أي أنّ، الثّمن الجديد هو 100 شيكل.

مثال

إنخفض سعر غرض من 15 إلى 12 شيكل. ما هي النّسبة المئويّة الّتي انخفض بها السّعر؟
في المثال التّالي، مُعطى التّغيير في سعر غرض معيّن، ويجب حساب النّسبة المئويّة للتّغيير.
التّغيير في السّعر هو 3 شيكل من 15 شيكل. يجب حساب كم جزءًا من مائة تُشكّل 3 من 15.
نترجم السّؤال إلى تعبير رياضيّ: $\frac{a}{100} \cdot 15 = 3$ ، ونحلّ المعادلة: $a = \frac{3 \cdot 100}{15} = 20$
أي أنّ، السّعر إنخفض بـ 20%.

التّناسب

تناسب x إلى y يُكتب x : y .
إنتبه: **التّناسب يُكتب بصياغة كلاميّة من اليمين إلى اليسار، وبصياغة رياضيّة (بالأعداد)- من اليسار إلى اليمين.**

مثال

التّناسب بين عدد أزواج جوارب نائل وبين عدد قمصانه هو 3:2. أي أنّ، مقابل كلّ 3 أزواج جوارب عند نائل 2 قمصان.
بكلمات أخرى، عدد أزواج جوارب نائل يساوي $\frac{3}{2}$ مرّة عدد قمصانه.

المعدّل

معدّل حسابيّ لمجموعة قيَم هو عدد ناتج عن قسمة مجموع القيَم على عدد القيَم.
عندما يكتب في الأسئلة «معدّل» فقط، فالمقصود هو معدّل حسابيّ.
مثلاً، معدّل مجموعة القيَم 1، 3، 5، 10 و 21 هو 8: $8 = \frac{40}{5} = \frac{1+3+5+10+21}{5}$.

إذا أُعطي معدّل مجموعة قيَم، يمكن حساب مجموعها بواسطة ضرب المعدّل بعدد القيَم.

مثال

إشترى رامي 5 سلع، معدّل ثمنها 10 شيكل. كم دفع رامي مقابل جميع السّلع؟
في هذا السّؤال يجب أن نجد المجموع بالاستناد الى المعدّل، ولذلك نضرب المعدّل بعدد السّلع: $50 = 5 \cdot 10$،
أي، دفع رامي مبلغ 50 شيكل مقابل جميع السّلع الّتي اشتراها.

معدّل مَوزون هو المعدّل الّذي يأخذ بالحسبان الوزن النّسبيّ لكلّ واحدة من القيَم الموجودة في المجموعة.

مثال

في امتحان نصف الفصل كانت علامة يوسف 75، وفي الامتحان النّهائيّ كانت علامته 90. إذا كان وزن الامتحان النّهائيّ يساوي مرّتين وزن امتحان نصف الفصل، ماذا ستكون علامة يوسف النّهائيّة في الفصل؟
مجموعة القيم التي تُكوّن علامة يوسف النّهائيّة في الفصل هي 75 و 90، ولكن لكلّ واحدة منهما وزن مختلف.
للعلامة 75 يوجد الوزن 1، وللعلامة 90 يوجد الوزن 2. حتّى نحسب المعدّل الموزون يجب ضرب كلّ علامة بوزنها، ومن ثمّ القسمة على مجموع الوزنَين: $85 = \frac{1 \cdot 75 + 2 \cdot 90}{1+2}$ ، أي أنّ علامة يوسف النّهائيّة في الفصل هي 85.
هذا الحساب مطابق لحساب المعدّل الحسابيّ العاديّ لثلاثة أعداد: 75، 90 و 90.

القوى والجذور

رفع عدد للقوّة n (n عدد صحيح وموجب) هو ضربه بنفسه n مرّات: $a^n = \underbrace{a \cdot ... \cdot a \cdot a}_{n \text{ مرّات}}$.

مثال، $(-3)^3 = (-3)(-3)(-3) = -27$.

a^n تُسمى «عملية رفع للقوّة»، n يُسمّى «أُس»، و a يُسمّى «قاعدة القوّة».

كلّ عدد يختلف عن الصّفر مرفوع للقوّة 0 يساوي 1: $a^0 = 1$ لكلّ $a \neq 0$.

عمليّة رفع عدد (a) لقوّة ذات أُسّ سالب (-n) تُعرَّف كرفع مقلوب العدد $\left(\frac{1}{a}\right)$ لقوّة العدد المضادّ للأُسّ (n): $a^{-n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n$.

مثال، $2^{-3} = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$.

جذر الـ n لعدد موجب a، المشار إليه بـ $\sqrt[n]{a}$، هو عدد موجب b إذا رفعناه للقوّة n، نحصل على a:

اذا $b^n = a$ اذن $\sqrt[n]{a} = b$. مثلاً، $\sqrt[4]{81} = 3$ لأنّ $3^4 = 81$.

عندما لا تُذكر قيمة الجذر، فالمقصود هو الجذر الّذي قيمته 2، مثلاً: $\sqrt{81} = \sqrt[2]{81} = 9$. الجذر الّذي قيمته 2 يُسمّى أيضًا الجذر التّربيعيّ. يمكن أيضًا التّعبير عن جذر كقوّة فيها الأُسّ هو كسر. هذا الكسر هو مقلوب قيمة الجذر:

$\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$ $(0 < a)$.

إنتبه: عندما يُكتب في السّؤال $\sqrt{a}$ $(0 < a)$ فالمقصود هو الجذر الموجب لـ a.

قوانين أساسيّة في عمليّات القوى (لكلّ n و m):

الضّرب: حتّى نضرب قوى لها نفس القاعدة، يجب جمع الإساس: $a^m \cdot a^n = a^{(m+n)}$.

القسمة: حتّى نقسم قوى لها نفس القاعدة، يجب طرح الأُسّ الموجود في المقام من الأُسّ الموجود في البسط:

$\frac{a^m}{a^n} = a^{(m-n)}$.

إنتبه: **عندما تكون قواعد القوى غير متطابقة، لا يمكن جمع أو طرح الإساس.**

رفع للقوّة: حتّى نرفع قوة لقوة أخرى يجب ضرب الإساس بعضها ببعض: $(a^m)^n = a^{(m \cdot n)}$.

رفع للقوّة لحاصل ضرب أو خارج قسمة: $(a \cdot b)^m = a^m \cdot b^m$ ، $\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$.

بما أنّه يمكن وصف الجذور كقوى أيضًا، يمكن تطبيق قوانين القوى على الجذور أيضًا.

مثلاً، حتّى نحلّ عمليّة الضّرب $\sqrt[m]{a} \cdot \sqrt[n]{a}$ $(0 < a)$، نعبّر أوّلاً عن الجذور كقوى: $\sqrt[m]{a} \cdot \sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{m}} \cdot a^{\frac{1}{n}}$

وفي المرحلة التّالية نحلّ حسب قانون الضّرب في القوى، أي نجمع الإساس: $a^{\frac{1}{m}} \cdot a^{\frac{1}{n}} = a^{\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{n}\right)}$.

تباينات في القوى:

إذا $0 < b < a$ وأيضًا $0 < n$ إذن $b^n < a^n$.

إذا $0 < b < a$ وأيضًا $n < 0$ إذن $a^n < b^n$.

إذا $1 < a$ وأيضًا $m < n$ إذن $a^m < a^n$.

إذا $0 < a < 1$ وأيضًا $m < n$ إذن $a^n < a^m$.

قوانين ضرب مختصر

حتّى نضرب تعبيرين مُعطيَين بين أقواس، وكلّ تعبير فيهما هو مجموع حدود، يجب ضرب كلّ حدّ من حدود التّعبير الأوّل بكلّ حدّ من حدود التّعبير الثّاني، ومن ثمّ جمع حواصل الضّرب.
مثلاً، $(a+b) \cdot (c+d) = ac + ad + bc + bd$.

بموجب هذا القانون العامّ يمكن حساب كلّ عمليّة ضرب لتعبيرين، ولكن يمكنك توفيرًا للوقت أن تحفظ غيبًا عدّة قوانين شائعة:

$$(a+b)^2 = (a+b) \cdot (a+b) = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a-b)^2 = (a-b) \cdot (a-b) = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a-b) \cdot (a+b) = a^2 - b^2$$

توافقيّات - كومبينَتوريكا

تجربة متعدّدة المراحل

مثال

نُلقي مكعّبًا وبعد ذلك نُلقي قطعة نقود. ما هو عدد النّتائج الممكنة لهذه التّجربة؟
في هذه التّجربة مرحلتان: مرحلة إلقاء المكعّب ومرحلة إلقاء قطعة النّقود.
عدد النّتائج الممكنة لرمي مكعّب هي 6 وعدد النّتائج الممكنة لرمي قطعة نقود هي 2.
عدد النّتائج الممكنة لهذه التّجربة هو $12 = 2 \cdot 6$، نتيجة واحدة ممكنة هي مثلاً، العدد 3 في المكعّب والوجه «شجرة» في قطعة النّقود.
في الواقع، لن يغيّر شيء إذا رمينا المكعّب وبعد ذلك رمينا قطعة النّقود، او إذا رمينا قطعة النّقود وبعد ذلك رمينا المكعّب أو رميناهما معًا. في كلّ حالة، هنالك 12 نتيجة ممكنة.

فيما يلي سنتطرّق إلى تجربة متعدّدة المراحل معطى فيها n من الأشياء، ويجب أن نُخرج منها شيئًا واحدًا عشوائيًّا r من المرّات. كلّ إخراج لشيء من المجموعة هو مرحلة في التّجربة، ويوجد في التّجربة كلها r مراحل. عدد النّتائج الممكنة في كلّ واحدة من الـ r مراحل متعلّق بطريقة إخراج الأشياء. عدد النّتائج الممكنة في التّجربة الشّاملة هو ضرب عدد النّتائج الممكنة، الحاصلة في r مراحل، بعضها ببعض. كلّ نتيجة ممكنة في التّجربة تسمّى **عيّنة**.

عيّنات ترتيبيّة مع إرجاع
طريقة إخراج الأشياء: الشّيء الّذي أُخرج **يُعاد** إلى المجموعة فورًا بعد إخراجه، **وثمّة أهميّة للتّرتيب** الّذي أُخرجت فيه الأشياء.
عدد النّتائج الممكنة: في كلّ مرحلة عدد النّتائج الممكنة هو n، لذلك فإنّ عدد النّتائج الممكنة في كلّ الـ r مراحل، أيّ في التّجربة كلّها، هو $n \cdot n \cdot ... \cdot n = n^r$.
إنتبه: بطريقة الإخراج هذه، يمكن أن يتمّ إخراج شيء واحد أكثر من مرّة.
عدد العيّنات التّرتيبيّة مع إرجاع هو n^r

مثال

توجد في علبة 9 كرات مُرقّمة من 1 حتّى 9. نُخرج من العلبة كرة واحدة عشوائيًّا، نُرجعها، ثمّ نكرّر هذه العمليّة مرّتين إضافيّتين. نُسجّل (من اليسار لليمين) أرقام الكرات الّتي أُخرجت، بحسب ترتيب إخراجها، بحيث نحصل على عدد ثلاثيّ المنازل.
كم عددًا مختلفًا ثلاثيّ المنازل يمكن الحصول عليه بهذه الطّريقة؟

في هذه التّجربة ثمّة أهميّة للتّرتيب: مثلاً، إذا كانت أرقام الكرات المُستخرجة هي 3 ، 8 و 3 بهذا التّرتيب، فسنحصل على العدد 383، لكن إذا أخرجنا الكرات بهذا التّرتيب 3 ، 3 و 8، فإنّ العدد النّاتج هو 338، وهذان عددان مختلفان.
عدد المراحل في التّجربة هو 3 وفي كلّ مرحلة عدد الاحتمالات الممكنة هو 9، ولذلك فإنّ عدد النّتائج الممكنة في التّجربة بأكملها هو $9^3 = 729$ ، أي يمكن الحصول على 729 عددًا مختلفًا ثلاثيّ المنازل.

عيّنة ترتيبيّة بدون إرجاع

طريقة إخراج الأشياء: الشّيء الّذي يُخرج **لا يُعاد** إلى المجموعة بعد إخراجه، **وثمّة أهميّة للتّرتيب** الّذي نُخرج فيه الأشياء.
عدد النّتائج الممكنة: عدد النّتائج الممكنة في المرحلة الأولى هو n، عدد النّتائج الممكنة في المرحلة الثّانية هو $n-1$ (إذ إنّ الشّيء الّذي أُخرج في المرحلة الأولى لم يتمّ إرجاعه، فبقي $n-1$ من الأشياء الّتي يمكن الاختيار من بينها) وهكذا حتّى المرحلة الأخيرة، المرحلة r ، الّتي يكون فيها عدد النّتائج الممكنة هو $n-r+1$. لذلك فإنّ عدد النّتائج الممكنة في التّجربة كلها هو $n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-r+1)$.
عدد العيّنات التّرتيبيّة دون إرجاع هو $n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-r+1)$

مثال

توجد في علبة 9 كرات مُرقّمة من 1 حتّى 9. نخرج من العلبة عشوائيًّا 3 كرات الواحدة تلو الأخرى، دون إرجاع كرة تمّ إخراجها. نسجّل (من اليسار لليمين) أرقام الكرات المستخرجة، بحسب ترتيب إخراجها، بحيث ينتج عدد ثلاثيّ المنازل.
كم عددًا ثلاثيّ المنازل مختلفًا يمكن الحصول عليه بهذه الطّريقة؟

في هذه التّجربة أيضًا ثمّة أهمية للتّرتيب الّذي أُخرجت به الكرات، ولكن بخلاف المثال السّابق، في هذه التّجربة لا يتمّ إرجاع الكرات الّتي أُخرجَت إلى العلبة، ولذلك عدد النّتائج الممكنة في المرحلة الأولى هو 9، في المرحلة الثّانية – 8، وفي المرحلة الثّالثة – 7. عدد النّتائج الممكنة في التّجربة بأكملها هو $9\cdot8\cdot7 = 504$، أي يمكن الحصول على 504 أعداد مختلفة ثلاثيّة المنازل.

ترتيبات داخليّة

عندما نكوّن عيّنة ترتيبيّة دون إرجاع من كلّ n الأشياء في المجموعة (أي، إذا كان $r=n$)، فكلّ نتيجة ممكنة تصف ترتيبًا داخليًّا للأشياء: أي شيء هو الأوّل، أيّ شيء هو الثّاني وهكذا. السّؤال هو: كم ترتيبًا داخليًّا ممكنًا؟
نعوّض $r=n$ في المعادلة لإيجاد عدد العيّنات التّرتيبيّة دون إرجاع فنحصل على: $n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot2\cdot1$.
هذا العدد يسمّى «مضروب الـ n» وُيشار إليه بـ $n!$
عدد التّرتيبات الدّاخليّة الممكنة لـ n أشياء هو $n!$

مثال

جدّة، والدة وبنت معنيّات بالوقوف في سطر بهدف التّقاط صورة. بكم طريقة مختلفة يستطعن عمل ذلك؟
يمكن النّظر إلى الواقفة على اليمين بأنّها الأولى، الوسطى – الثّانية والّتي تقف على اليسار – الثّالثة، وعندئذٍ فالسّؤال هو كم ترتيبًا داخليًّا للجدّة، الأم والبنت ممكنًا؟ الجدّة، الأم والبنت يشكّلن مجموعة مؤلّفة من 3 أشياء، ولذلك فإنّ عدد التّرتيبات الدّاخليّة هو $6 = 1 \cdot 2 \cdot 3 = !3$. لنذكر التّرتيبات الممكنة بالتّفصيل:
جدّة – أمّ – بنت، جدّة – بنت – أمّ، أمّ – جدّة – بنت، أمّ – بنت – جدّة، بنت – جدّة – أمّ، بنت – أمّ – جدّة.

عيّنات غير ترتيبيّة

طريقة إخراج الأشياء: شيء يُخرج **لا يُعاد** إلى المجموعة بعد أن أُخرج، **ولا توجد أهمية للتّرتيب** الّذي أُخرجت فيه الأشياء.
عندما لا توجد أهميّة للتّرتيب، فكلّ العيّنات الّتي تحتوي على r من الأشياء (فقط ترتيب اختيارها مختلف بكلّ عيّنة) تُعتبر نفس النّتيجة. في الواقع، عدد هذه العيّنات هو عدد التّرتيبات الدّاخليّة للـ r أشياء، أي !r.
لحساب عدد النّتائج الممكنة في عيّنات غير ترتيبيّة، يُحسب عدد النّتائج الممكنة كما لو أنّ ثمّة أهميّة للتّرتيب ويُقسم على عدد التّرتيبات الدّاخليّة لـ r من الأشياء.

$$\text{عدد العيّنات غير التّرتيبيّة} = \frac{\text{عدد العيّنات التّرتيبية دون إرجاع}}{\text{عدد التّرتيبات الدّاخليّة في العيّنة}} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-r+1)}{r!}$$

مثال

توجد في علبة 9 كرات مرقّمة من 1 إلى 9. نُخرج من العلبة عشوائيًّا 3 كرات واحدة تلو الأخرى دون إرجاع كرة أُخرجت، ثمّ نضع الكرات الّتي أُخرجت داخل قبّعة. ما هو عدد الإمكانيّات المختلفة لتركيبة الكرات في القبّعة؟

في هذا السّؤال المهمّ هو تركيبة الكرات في القبّعة وليس التّرتيب الّذي أُخرجت فيه من العلبة. مثلاً، إذا كانت الكرات قد أُخرجت بترتيب 5 ، 1 و 4، فتركيبة الكرات في القبّعة هو 1 ، 4 و 5، وهذه ستكون تركيبة الكرات في القبّعة إذا أُخرجت أيضًا بترتيب 4 ، 5 و 1 أو بأيّ من !3 التّرتيبات الممكنة: 5-4-1 ، 4-5-1 ، 5-1-4 ، 1-5-4 ، 4-1-5 و1-4-5 (في الواقع، لا توجد أهميّة لإخراج الكرات واحدة تلو الأخرى، ويمكن إخراجها دفعة واحدة دون أن يؤثّر ذلك على النّتيجة).
لذلك، عدد التّركيبات الممكنة هو $\frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{3!}$، أي توجد 84 إمكانيّة مختلفة لتركيبة الكرات في القبّعة.

الاحتمالات

نظريّة الاحتمالات هي نموذج رياضيّ لظواهر إمكانيّةُ حدوثها غير مؤكّدة، او لتجارب نتائجها غير مؤكّدة. كلّ نتيجة ممكن حدوثها في التّجربة تُسمّى «حدثًا بسيطًا»، ومجموعة من النّتائج تُسمّى «حدثًا». للاختصار، فيما يلي سنستعمل المصطلح «حدث» للإشارة أيضًا إلى «حدث بسيط». يُنسب لكلّ حدثٍ عددٌ بين $0 - 1$، والّذي يعكس احتمال (مدى إمكانيّة) وقوع الحدث. كلّما كان الاحتمال أكبر، تزداد إمكانيّة وقوع نفس الحدث.
عندما تكون إمكانيّة وقوع الحدث مؤكّدة، فإن احتمال وقوعه هو 1، وعندما لا يمكن وقوع الحدث بتاتًا، فإنّ احتمال وقوعه هو 0.
مجموع احتمالات كلّ الأحداث البسيطة في التّجربة هو 1.

عندما يكون لكلّ واحدة من n النّتائج الممكنة لتجربة معيّنة نفس احتمال الوقوع، فإنّ الأمر يعني أنّ النّتائج متساوية الاحتمالات. في هذه الحالة احتمال كلّ نتيجة هو $\frac{1}{n}$.

مثال

التّجربة: رمي قطعة نقود.
النّتائج الممكنة: وجها العملة. نسجّل عليهما: 1 أو 0 (أو: نقش أو عدد)

إذا كانت **قطعة النّقود نزيهة**، فإنّ النّتيجتين متساويتين من ناحية الاحتمال: الاحتمال أن نحصل على «1» مساوٍ للاحتمال أن نحصل على «0»، ولذلك فإنّ احتمال كلّ نتيجة ممكنة هو $\frac{1}{2}$.

مثال

التّجربة: رمي مكعّب نزيه (حجر النّرد).

النّتائج الممكنة: الأعداد 1 ، 2 ، 3 ، 4 ، 5 و 6 المسجّلة على أوجه المكعّب.

إذا كان **النّرد نزيهًا**، فإنّ احتمال كلّ واحدة من النّتائج الممكنة هو $\frac{1}{6}$.

عندما تكون جميع النّتائج الممكنة متساوية الاحتمال،

احتمال وقوع حدث هو: $\dfrac{\textbf{عدد النّتائج في هذا الحدث (المعيّن)}}{\textbf{مجموع كلّ النّتائج الممكنة في التّجربة}}$

مثال

التّجربة: رمي مكعّب نزيه.
الحدث: النّتيجة أقلّ من 4.
النّتائج الممكنة في هذا الحدث: الأعداد 1 ، 2 و 3.
احتمال وقوع الحدث: $\frac{1}{2} = \frac{3}{6}$.

مثال

التّجربة: إخراج كرة من جرّة تحتوي على 5 كرات بيضاء و 5 كرات سوداء.
الحدث: إخراج كرة سوداء.

احتمال وقوع الحدث: $\frac{1}{2} = \frac{5}{10} = \dfrac{\text{عدد الكرات السّوداء}}{\text{مجموع كلّ الكرات في الجرّة}}$.

احتمال وقوع حدثين
عند وقوع حدثين في الوقت ذاته أو الواحد تلو الآخَر يمكن وجود وضعين:

أ. **الحدثان غير مُتعلّقين ببعضهما**، أي أنّ احتمال وقوع الحَدث الأوّل غير متأثّر باحتمال وقوع الحَدث الثّاني.

ب. **الحدثان متعلّقان ببعضهما**، أي أنّ احتمال وقوع الحَدث الأوّل متأثّر باحتمال وقوع الحَدث الثّاني. أو بكلمات أخرى، احتمال وقوع حدث معيّن بعد (أو بشرط) وقوع حدث آخر يختلف عن احتمال وقوع الحدث المعيّن (بدون الشّرط).

مثال

يوجد في جرّة 10 أقلام: 5 بيض و 5 سود. نُخرج قلمين من الجرّة، الواحد تلو الآخر.
معلوم أنّ القلم الأوّل الّذي أُخرج هو أسود.
ما هو احتمال أن يكون القلم الثّاني الّذي أُخرج أيضًا أسود؟

هنالك وضعان–

وضع أ: نُرجع القلم الأول إلى الجرّة.
بما أنّنا أرجعنا القلم إلى الجرّة، لم يحدث تغيير في عدد الأقلام في الجرّة، وخاصّة لم يحدث تغيير في عدد الأقلام السّود.
احتمال إخراج قلم ثانٍ أسود هو $\frac{1}{2} = \frac{5}{10}$ وهو مساوٍ لاحتمال إخراج قلم أول أسود.
من هنا فلا توجد أهميّة لكون القلم أُخرج ثانيًا.
أي أنّ، الحدث «إخراج قلم أول أسود» والحدث «إخراج قلم ثانٍ أسود» هما حدثان غير متعلّقين ببعضهما.

وضع ب: لا نُرجع القلم الأول إلى الجرّة.
بعد أن أخرجنا من الجرّة قلمًا أسود بقي في الجرّة 9 أقلام بالمُجمل، منها 4 أقلام سود.
لذلك، احتمال إخراج قلم ثانٍ أسود هو $\frac{4}{9}$.
أي أنّ، الحدث «إخراج قلم أول أسود» والحدث «إخراج قلم ثانٍ أسود» هما حدثان متعلّقان ببعضهما.

احتمال وقوع حدثين غير متعلّقين (في الوقت ذاته أو الواحد بعد الآخر) هو حاصل ضرب الاحتمالات لكل واحد من الأحداث على حدة.

مثال

التّجربة: رمي مكعبين نزيهين – واحد أحمر والآخر أصفر.
نشير للحدث «الحصول على عدد أصغر من 3 في المكعّب الأحمر» بـ A. احتمال وقوع الحدث A هو $\frac{1}{3} = \frac{2}{6}$.
نشير للحدث «الحصول على عدد زوجيّ في المكعّب الأصفر» بـB. احتمال وقوع الحدث B هو $\frac{1}{2} = \frac{3}{6}$.
لأنّ نتيجة رمي مكعّب واحد لا تؤثّر على احتمال النّتيجة الّتي تحصل من رمي المكعّب الآخر، فإنّ الحدث A والحدث B هما حدثان غير متعلّقين ببعضهما.
احتمال وقوع الحدث A والحدث B في الوقت ذاته هو $\left(\begin{array}{c}\text{احتمال}\\ \text{الحدث A}\end{array} \times \begin{array}{c}\text{احتمال}\\ \text{الحدث B}\end{array}\right)$، أي $\frac{1}{6} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}$.

نعرّف حدثين متعلّقين ببعضهما A و B (في تجربة ما)،

احتمال وقوع الحدث B بشرط أنّ الحدث A قد وقع هو: $\dfrac{\textbf{عدد النّتائج المشتركة لـB ولـA}}{\textbf{عدد نتائج A}}$

مثال

التّجربة: رمي مكعّب (نرد).
ما هو احتمال الحصول على نتيجة أصغر من 4 إذا علمنا أننا حصلنا على نتيجة زوجيّة؟

نشير إلى الحدث « حصول على نتيجة زوجيّة » بـِ A، والحدث « حصول على نتيجة أصغر من 4 » بـِ B.

نصوغ السّؤال من جديد بواسطة الحدثين: ما هو احتمال وقوع B إذا علمنا (بشرط) أنّ A قد وقع؟
توجد 3 نتائج في الحدث A: 2، 4 و 6.
توجد 3 نتائج في الحدث B: 1، 2 و 3.
لكن، إذا علمنا أنّ الحدث A قد وقع فهنالك نتيجة واحدة ممكنة لـ B: 2.
وبكلمات أخرى، النّتيجة « 2 » هي النّتيجة الوحيدة المشتركة لـ A و B.
لذلك فاحتمال B إذا علمنا أن A قد وقع هو: $\frac{1}{3}$.

هذا الاحتمال يختلف عن احتمال B (بدون شرط) ويساوي $\frac{1}{2}$.

المسافة، السّرعة، الزّمن

سرعة جسم هي المسافة التي يقطعها هذا الجسم في وحدة زمن.

المعادلة الّتي تربط بين السّرعة، المسافة التي قطعها الجسم والزّمن الذي إحتاجه لقطع المسافة هي: $v = \frac{s}{t}$.

بحيث أنّ: v = السّرعة
s = المسافة
t = الزّمن

من هذه المعادلة يمكن اشتقاق جميع العلاقات الممكنة بين المسافة، السّرعة والزّمن: $t = \frac{s}{v}$ ، $s = v \cdot t$.

مثال

قطع قطار 240 كم بسرعة 80 كم/ساعة. كم من الوقت استغرقت السّفرة؟

مُعطى v (80 كم/ساعة) و s (240 كم)، ويجب حساب t.

لأنّ السّرعة معطاة بالكيلومترات للسّاعة، فإنّ زمن السّفرة يُحسب بالسّاعات.

نعوّض المُعطيات في المعادلة $t = \frac{s}{v}$: $t = \frac{240}{80} = 3$.

أي أنّ، السّفرة استغرقت 3 ساعات.

وحدات القياس لاثنتين من القيم تُحدّد وحدة القياس للقيمة الثّالثة.
مثلاً: إذا كانت المسافة مذكورة بالكيلومترات (كم)، والزّمن– بالسّاعات، تُذكر السّرعة بالكيلومتر للسّاعة (كم/ساعة).
إذا كانت المسافة مذكورة بالأمتار، والزّمن– بالثّواني، تُذكر السّرعة بالمتر للثّانية.
يمكن تحويل الأمتار إلى كيلومترات، والثّواني– إلى ساعات، وبالعكس.

في الكيلومتر الواحد يوجد 1,000 متر (1 متر = $\frac{1}{1,000}$ كم).

في السّاعة الواحدة يوجد 3,600 ثانية، وهي عبارة عن 60 دقيقة (1 ثانية = $\frac{1}{3,600}$ ساعة).

سرعة 1 كيلومتر في السّاعة تساوي سرعة $\frac{5}{18}$ متر بالثّانية $\left(\frac{1,000}{3,600} = \frac{5}{18}\right)$.

سرعة 1 متر بالثّانية تساوي سرعة 3.6 كم/السّاعة $\left(\frac{\frac{1}{1,000}}{\frac{1}{3,600}} = \frac{3,600}{1,000} = 3.6\right)$.

القدرة، العمل، الزّمن

القدرة هي كمّيّة العمل في وحدة زمن.

المعادلة الّتي تربط بين القدرة، كمّيّة العمل والزّمن المطلوب لتنفيذ العمل هي: $p = \frac{w}{t}$.

بحيث أنّ: p = القدرة

w = كمّيّة العمل

t = الزّمن

من هذه المعادلة يمكن اشتقاق جميع العلاقات الممكنة بين القدرة، كمّيّة العمل والزّمن: $t = \frac{w}{p}$ ، $w = p \cdot t$.

مثال

ينهي بنّاء بناء جدار في 3 ساعات. كم ساعة يلزم لبنّاءَين يعملان بنفس هذا الايقاع من أجل إنهاء بناء 5 جدران؟

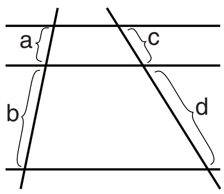
في السّؤال مُعطاة كمّيّة العمل لبنّاء واحد (جدار واحد) وزمن عمله (3 ساعات). من هنا فان قدرته هي $\frac{1}{3}$ جدار في السّاعة.

لأن السّؤال هو عن بنّاءَين، فإنّ قدرتهما معًا هي $2 \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$ جدار بالسّاعة.

مُعطاة أيضًا كمّيّة العمل المطلوبة من البنّاءَين وهي5 جدران، لذلك يمكن حساب الزّمن اللازم لهما:

$t = \frac{5}{\frac{2}{3}} = 5 \cdot \frac{3}{2} = \frac{15}{2} = 7\frac{1}{2}$. هذا يعني، يلزمهم $7\frac{1}{2}$ ساعات.

مستقيمات متوازية (خطوط متوازية)



مستقيمات متوازية التي تقطع مستقيمين أيًّا كانا، تقسم المستقيمين إلى قطع متناسبة بطولها.

مثلاً، في الرّسم $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$ ، $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ وأيضًا $\frac{a}{a+b} = \frac{c}{c+d}$.

يمكن إيجاد تناسبات إضافيّة بين القطع بناءً على التّناسبات المُعطاه.

زوايا

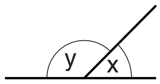
زاوية قائمة هي زاوية تساوي $90°$، في الرّسومات يُشار إليها بـ ⦜ .

زاوية حادة هي زاوية أصغر من $90°$.

زاوية منفرجة هي زاوية أكبر من $90°$.

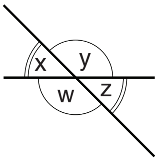
زاوية مستقيمة هي زاوية تساوي $180°$.

زوايا مُتجاورة

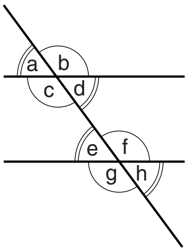


الزّاويتان النّاتجتان بين مستقيم وشعاع خارج من نقطة على المستقيم تسمّيان زاويتين مُتجاورتين.
هاتان الزّاويتان تكوّنان معًا زاوية مستقيمة، لذلك فمجموعهما هو $180°$.
مثلاً، في الرّسم x و y هما زاويتان مُتجاورتان، ولذلك $x + y = 180°$.

زوايا متقابلة بالرّأس



عند تقاطع خطّين مستقيمين تنتج أربع زوايا. كلّ زاويتين ليستا مُتجاورتين تسمّيان زاويتين متقابلتين بالرّأس، وتكونان متساويتين.
مثلاً، في الرّسم x و z هما زاويتان متقابلتان بالرّأس وكذلك ايضاً y و w. لذلك $x = z$ وأيضًا $w = y$.

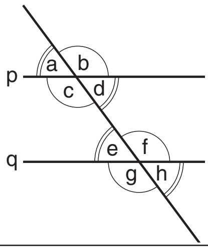


عندما يقطع خطّ مستقيم مستقيمين متوازيين تنتج ثماني زوايا.
مثلاً، كما في الرّسم a، b، c، d، e، f، g و h.

زوايا متناظرة هي زوايا موجودة على نفس جهة المستقيم القاطع وعلى نفس جهة المستقيمين المتوازيين. الزّوايا المتناظرة متساوية.
لذلك في الرّسم $a = e$، $b = f$، $c = g$ و $d = h$.

زوايا متبادلة هي زوايا موجودة في الجهات المتعاكسة للمستقيم القاطع وفي الجهات المتعاكسة للمستقيمين المتوازيين. الزّوايا المتبادلة متساوية.
لذلك في الرّسم $a = h$، $b = g$، $c = f$ و $d = e$.

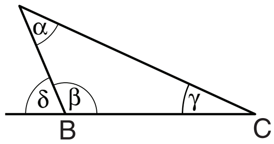
مثال



معطى: المستقيمان p و q متوازيان.
$d + f = ?$
c و d هما زاويتان متجاورتان، ولذلك $d + c = 180°$.
c و f هما زاويتان متبادلتان، ولذلك $c = f$.
لذلك $d + f = d + c = 180°$، والإجابة هي $180°$.

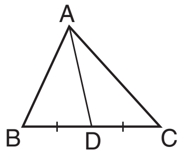
مثلّثات

زوايا المُثلّث

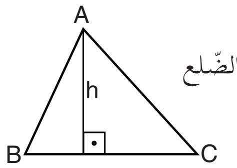


مجموع الزّوايا الدّاخليّة في كل مُثلّث هو $180°$. مثلاً في الرّسم، $\alpha + \beta + \gamma = 180°$.
الزّاوية المُجاورة لإحدى زوايا المُثلّث تُسمّى زاوية خارجيّة، وهي تساوي مجموع الزّاويتين الأخريين في المُثلّث. مثلاً في الرّسم، δ هي زاوية مجاورة لـ β، ولذلك $\delta = \alpha + \gamma$.

في كلّ مُثلّث، الضّلع المقابلة لزاوية أكبر هي ضلع أطول.
مثلاً في الرّسم، إذا $\beta > \alpha > \gamma$، إذن الضّلع AC (الموجودة مقابل الزّاوية β) أطول من الضّلع BC (الموجودة مقابل الزّاوية α)، والضّلع BC أطول من الضّلع AB (الموجودة مقابل الزّاوية γ).

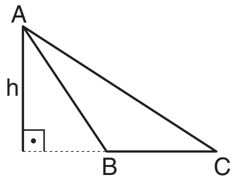


متوسّط في المُثلّث هو القطعة الّتي تصل بين رأس في المثلّث ونقطة منتصف الضّلع المقابلة لنفس الرّأس.
مثلاً في الرّسم، AD هو متوسّط للضّلع BC (BD = DC).



الارتفاع في المثلّث

الارتفاع النّازل على ضلع في مُثلّث هو القطعة الّتي تخرج من رأس في المُثلّث الى الضّلع المقابلة لنفس الرّأس (او امتدادها) وهي تعامد هذه الضّلع.
مثلاً في المُثلّثات الّتي تظهر في الرّسم، h هو الارتفاع على الضّلع BC.



مساحة المُثلّث

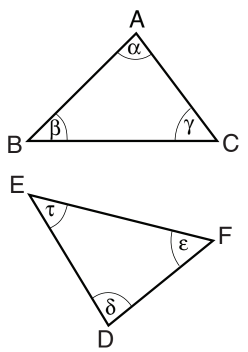
مساحة المُثلّث تساوي حاصل ضرب طول إحدى الأضلاع في الارتفاع النّازل عليها، مقسومًا على 2.

مثلاً في الرّسم، مساحة كلّ واحد من المُثلّثين ABC هي: $\frac{BC \cdot h}{2}$.

تباين المُثلّث

في كلّ مُثلّث، يكون مجموع طولَي كلّ ضلعين فيه أكبر من طول الضّلع الثّالثة.
مثلاً في المُثلّثات الّتي في الرّسومات، AC < (AB + BC).

مُثلّثات متطابقة



شكلان هندسيّان هما شكلان متطابقان إذا أمكنَ وضع واحد منهما على الآخر بشكل يجعلهما يتكتّلان سويّة. مثال لتطابق أشكال هندسيّة هو **تطابُق مُثلّثات**. إذا كان المُثلّثان متطابقين، فهذا يعني أنّ أضلاعهما وزواياهما متساوية بالتّتالي.
مثلاً في الرّسم، إذا كان المُثلّث ABC مطابق للمُثلّث DEF اذاً اضلاعهما متساوية بالتّتالي: AB = DE، BC = EF و AC = DF وكذلك زواياهما متساوية بالتّتالي: $\alpha=\delta$، $\beta=\tau$ و $\gamma=\varepsilon$.

كلّ واحد من القوانين الأربعة التّالية تُمكّننا من الاستنتاج أنّ المُثلّثين متطابقان:

(أ) يتطابق مثلّثان إذا تحقّق أنَّ ضلعين من أضلاع المُثلّث الأوّل متساويتان بالتّتالي مع ضلعين من أضلاع المُثلّث الآخَر، والزّاوية التي بين هاتين الضّلعين في المُثلّث الأوّل مساوية للزّاوية المناظرة في المُثلّث الآخَر (ض، ز، ض).
مثلاً في الرّسم، إذا AB = DE، AC = DF و $\alpha=\delta$، اذاً المثلثان متطابقان.

(ب) يتطابق مثلّثان إذا تحقّق أنَّ زاويتين من زوايا المُثلّث الأوّل متساويتان بالتّتالي مع زاويتين من زوايا المُثلّث الآخَر، والضّلع الّتي بين هاتين الزّاويتين في المثلّث الأوّل مساوية للضّلع المناظرة في المُثلّث الآخَر (ز، ض، ز).
مثلاً في الرّسم، إذا $\alpha = \delta$، $\beta = \tau$ و AB = DE، اذاً المثلّثان متطابقان.

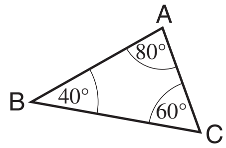
(ج) يتطابق مثلّثان إذا تحقّق أنَّ أطوال الأضلاع الثّلاث في المُثلّث الأوّل مساوية لأطوال الأضلاع الثّلاث في المُثلّث الآخَر (ض، ض، ض).

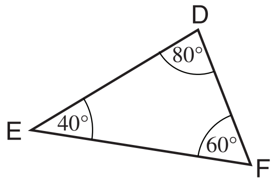
(د) يتطابق مثلّثان إذا تحقّق أنَّ طوليّ ضلعين من أضلاع المُثلّث الأوّل متساويين بالتّتالي مع طوليّ ضلعين من أضلاع المُثلّث الآخَر، والزّاوية المقابلة للضّلع الأكبر من بين الإثنتين في المُثلّث الأوّل مساوية للزّاوية المناظرة في المُثلّث الآخَر (ض، ض، ز).
مثلاً في الرّسم، إذا AB > AC و DE > DF ويتحقّق أنّ AB = DE، AC = DF و $\gamma = \varepsilon$، اذاً المثلّثان متطابقان.

مُثلّثات متشابهة

مثلّثان هما مثلّثان متشابهان إذا كانت الزّوايا الثّلاث في المُثلّث الأوّل مُساوية للزّوايا الثّلاث في المُثلّث الثّاني.

في المُثلّثات المتشابهة، التّناسب بين كلّ ضلعين في المُثلّث الأول مساوٍ للتّناسب بين الضلعين الملائمتين في المُثلّث الثّاني. مثلاً في الرّسم، المُثلّثان ABC و DEF متشابهان، لذلك $\frac{AB}{AC} = \frac{DE}{DF}$.

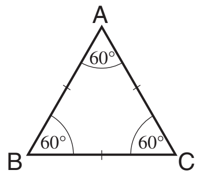




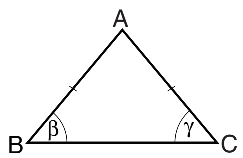
ينتج من ذلك أيضًا : $\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF} = \frac{BC}{EF}$.

مثلّثات متطابقة هي حتماً مثلّثات متشابهة.

أنواع مُثلّثات



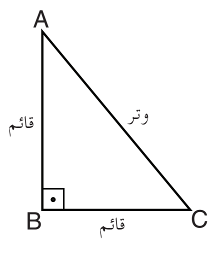
مُثلّث متساوي الأضلاع هو مُثلّث تكون أطوال جميع أضلاعه متساوية.
مثلاً في الرّسم، $AB = BC = AC$. في مُثلّث كهذا أيضًا جميع الزّوايا متساوية بكبرها ($60°$).
إذا كان طول ضلع مُثلّث كهذا هو a، فإنّ ارتفاعه $a \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$ ومساحته تساوي $a^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}$.



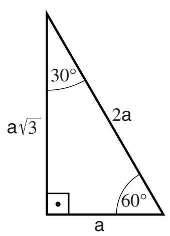
مُثلّث متساوي السّاقين هو مُثلّث يكون ضلعان من أضلاعه متساويتين في الطّول. مثلاً في الرّسم، $AB = AC$. الضّلع الثّالثة في المُثلّث المتساوي السّاقين تُسمى «قاعدة».
الزّاويتان المقابلتان للضّلعين المتساويتين، متساويتان أيضًا. مثلاً في الرّسم، $\beta = \gamma$.

مُثلّث حادّ الزّاوية هو مُثلّث تكون جميع زواياه حادّة.

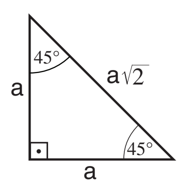
مُثلّث منفرج الزّاوية هو مُثلّث تكون إحدى زواياه منفرجة.



مُثلّث قائم الزّاوية هو مُثلّث تكون إحدى زواياه قائمة ($90°$).
الضّلع المقابلة للزّاوية القائمة تُسمّى **وتر** (في الرّسم: الضلع AC) والضّلعان الأخريان تُسمّيان **قائمين** (في الرّسم: AB و BC).
حسب نظريّة فيثاغورس: في مثلّث قائم الزّاوية يكون تربيع الوتر مساويًا لمجموع تربيعَي القائمين. مثلاً في الرّسم، $AC^2 = AB^2 + BC^2$.
بمساعدة هذه المعادلة يمكن إيجاد طول كلّ ضلع إذا كان مُعطى طولا الضّلعين الأخريين.



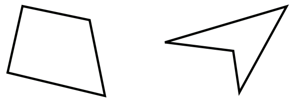
في مثلّث قائم الزّاوية قيَم زواياه $30°$، $60°$ و $90°$، يكون طول الضّلع القائمة المقابلة للزّاوية الّتي قيمتها $30°$ يساوي نصف طول الوتر.
مثلاً في الرّسم، طول الوتر هو $2a$ ولذلك طول الضّلع القائمة المقابلة للزّاوية الّتي قيمتها $30°$ هو a .
وحسب نظريّة فيثاغورس، ينتج أيضاً أنّ طول الضّلع القائمة المقابلة للزّاوية الّتي قيمتها $60°$ هو $a\sqrt{3}$.



في مثلّث قائم الزّاوية ومتساوي السّاقين قيم زواياه $45°$، $45°$ و $90°$، طولا القائمين متساويان وطول الوتر يساوي $\sqrt{2}$ مرّة طول كلّ من القائمين (حسب نظريّة فيثاغورس).
مثلاً في الرّسم، طول كلّ واحد من القائمين هو a ولذلك طول الوتر هو $a\sqrt{2}$.

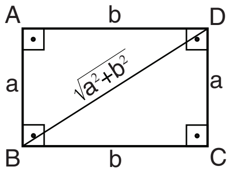
أشكال رباعيّة

الشّكل الرّباعي هو كلّ مضلّع ذو 4 أضلاع. مثلاً:



المستطيل والمربّع

المستطيل هو شكل رباعيّ كلّ زواياه قائمة. في المستطيل كلّ ضلعين متقابلتين متساويتان في الطول.

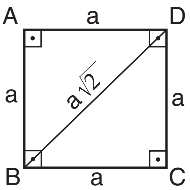


محيط المستطيل الّذي في الرّسم هو $2a + 2b = 2(a+b)$.

طول القطر في المستطيل الّذي في الرّسم هو $\sqrt{a^2+b^2}$ (حسب نظريّة فيثاغورس).

مساحة المستطيل تساوي حاصل ضرب أطوال ضلعين متجاورتين.
مساحة المستطيل الّذي في الرّسم هو $a \cdot b$.

المربّع هو مستطيل جميع أضلاعه متساوية.



محيط المربّع الّذي في الرّسم هو $4a$.

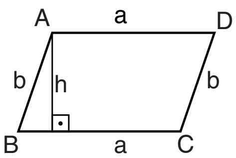
طول قطر المربّع الّذي في الرّسم هو $\sqrt{a^2+a^2} = a\sqrt{2}$.

مساحة المربّع تساوي تربيع طول الضّلع. مساحة المربّع الّذي في الرّسم هو a^2 .

متوازي الأضلاع والمعين

متوازي الأضلاع هو شكل رباعيّ فيه كلّ ضلعين متقابلتين متوازيتان ومتساويتان.
مثلاً، في متوازي الأضلاع في الرّسم $AB||DC$ ، $AD||BC$
$AB = DC$ ،$AD = BC$

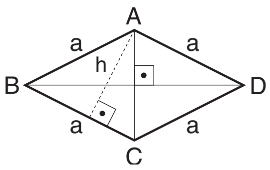
القطران في متوازي الأضلاع ينصّفان بعضهما البعض.



محيط متوازي الأضلاع الّذي في الرّسم هو $2a + 2b$.
الارتفاع في متوازي الأضلاع هو قطعة تصل بين ضلعين متقابلتين (او امتدادهما) وهي عموديّة عليهما.

مساحة متوازي الأضلاع تساوي حاصل ضرب الضّلع في الارتفاع النّازل عليها.
مثلاً، في متوازي الأضلاع الظّاهر في الرّسم، المساحة هي $a \cdot h$.

المعين هو شكل رباعيّ كلّ الأضلاع الأربع فيه متساوية.
في المعين كلّ ضلعين متقابلتين متوازيتان، لذلك يمكن إعتباره متوازي أضلاع كل اضلاعه متساوية.

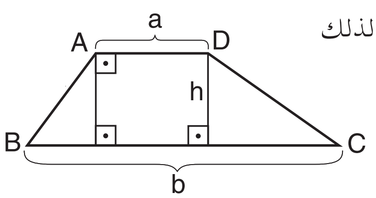


القطران في المعين
بما أنّ المعين عبارة عن نوع من متوازيات الأضلاع، ففيه أيضًا ينصّف القطران بعضهما البعض. في المعين القطران يتعامدان أيضًا.

محيط المعين الظّاهر في الرّسم هو 4a.

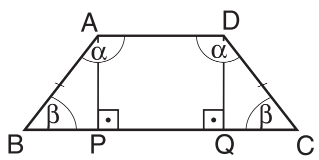
مساحة المعين
بما أنّ المعين عبارة عن نوع من متوازيات الأضلاع، فإنّ مساحته أيضًا تساوي حاصل ضرب الضّلع في الارتفاع النّازل عليها. مثلاً، مساحة المعين في الرّسم هي $a \cdot h$.
كذلك يمكن حساب مساحة المعين كحاصل ضرب قطريه ببعضهما مقسومًا على 2.
مثلاً، مساحة المعين في الرّسم هي $\frac{AC \cdot BD}{2}$.

شبه المنحرف

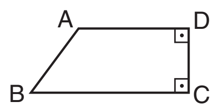


شبه المنحرف هو شكل رباعيّ فيه **فقط** ضلعان متوازيتان. الضّلعان المتوازيتان تُسمّيان **قاعدتين**. الضّلعان الأخريان تُسمّيان **ساقَين**. قاعدتا شبه المنحرف ليستا متساويتين، لذلك تُسمّيان «القاعدة الكبرى» و «القاعدة الصّغرى».

الارتفاع في شبه المنحرف هو قطعة تصل بين قاعدتَي شبه المنحرف وتُعامدهما.
مساحة شبه المنحرف تساوي نصف حاصل ضرب مجموع القاعدتين في الارتفاع.
مثلاً، مساحة شبه المنحرف في الرّسم هي $\frac{(a+b) \cdot h}{2}$.

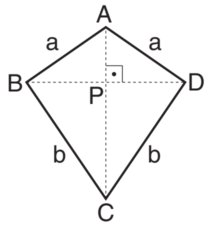


شبه المنحرف متساوي السّاقين هو شبه منحرف تكون فيه السّاقان متساويتين.
مثلاً في الرّسم: $AB = DC$.
في شبه منحرف متساوي السّاقين، زاويتَا القاعدة الكبرى متساويتان وزاويتَا القاعدة الصّغرى متساويتان.
مثلاً في الرّسم، $\sphericalangle ABC = \sphericalangle DCB = \beta$, $\sphericalangle BAD = \sphericalangle CDA = \alpha$.
في شبه منحرف متساوي السّاقين، عند إنزال إرتفاعين من طرفَي القاعدة الصّغرى إلى القاعدة الكبرى، نحصل على مستطيل وعلى مُثلّثين قائمَي الزّاوية متطابقين (ABP و DCQ).



شبه المنحرف قائم الزّاوية هو شبه منحرف إحدى زوايا القاعدة الكبرى فيه قائمة (وبالطبع أيضًا إحدى زوايا القاعدة الصّغرى).

الدّالتون



الدّالتون هو شكل رباعيّ مبنيّ من مُثلّثين متساويي السّاقين لهما قاعدة مشتركة.
مثلاً في الرّسم، الدّالتون ABCD مكوّن من المُثلّثين ABD و BCD،
(CB = CD ، AB = AD).

القطر الّذي يصل بين رأسَي المُثلّثين متساويَي السّاقين يَنصّف القطر الّذي يُشكّل قاعدة للمُثلّثين متساويَي السّاقين ويعامده.
مثلاً في الرّسم، AC يُنصّف BD (BP = PD) وأيضًا يعامده $AC \perp BD$.

محيط الدّالتون الظّاهر في الرّسم هو $2a + 2b$.

مساحة الدّالتون مساوية لحاصل ضرب طول القطرين مقسومًا على 2.
مثلاً، مساحة الدّالتون الّذي في الرّسم هي $\frac{AC \cdot BD}{2}$.

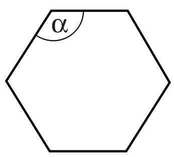
مضّلع منتظم

مضّلع منتظَم هو مضّلع تكون جميع أضلاعه متساوية وجميع زواياه الدّاخليّة متساوية.

أمثلة، مثمّن منتظَم هو مضلّع منتظَم ذو 8 أضلاع.
مخمّس منتظَم هو مضلّع منتظَم ذو 5 أضلاع.
مُربّع هو مضلّع منتظَم ذو 4 أضلاع.
مثلّث متساوي الأضلاع هو مضلّع منتظم ذو 3 أضلاع.

يمكن حساب قيمة الزّاوية الدّاخليّة α في مضّلع منتظم له n أضلاع بواسطة القانون:

$$\alpha = \left(180° - \frac{360°}{n}\right) = \left(\frac{180°n - 360°}{n}\right)$$



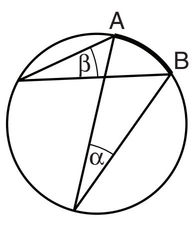
مثلاً في مسدّس منتظم كالظّاهر في الرّسم، قيمة كل زاوية من زواياه الدّاخلية هي 120°:

$$\alpha = 180° - \frac{360°}{6} = 120°$$

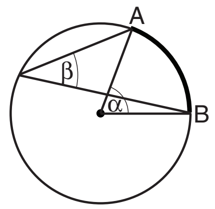
الدّائرة

نصف القطر هو قطعة تصل بين مركز الدّائرة ونقطة أيًّا كانت على محيطها.
وتر في الدّائرة هو قطعة تمرّ داخل الدّائرة وتوصل بين نقطتين مختلفتين على محيطها.
قطر هو وتر في الدّائرة يمرّ عبر مركزها.
طول القطر في دائرة يساوي مرّتين طول نصف القطر. إذا أشرنا إلى نصف القطر بـ r، عندها يكون القطر $2r$.
محيط دائرة نصف قطرها r هو $2\pi r$ (قيمة π هي 3.14 تقريبًا).
مساحة دائرة نصف قطرها r هي πr^2.
الجزء من محيط الدّائرة المحصور بين نقطتين يسمّى **قوسًا**.
الجزء من مساحة الدّائرة المحصور بين نصفي قطر وقوس يسمّى **قطاع**.

زّاوية محيطيّة

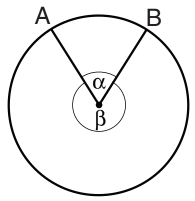


زاوية محيطيّة هي زاوية يكون رأسها على محيط الدّائرة وساقاها وَتَرين فيها.
الزّوايا المحيطيّة المبنيّة على نفس القوس متساوية القيمة.
مثلاً في الرّسم، الزّاويتان α و β هما زاويتان محيطيّتان مبنيّتان على القوس AB، لذلك $\alpha = \beta$.
الزّاوية المحيطيّة المبنيّة على القطر (أي على قوس طولها نصف محيط الدّائرة) هي زاوية قائمة.



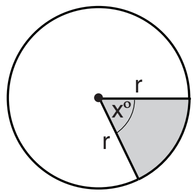
زاوية مركزيّة

زاوية مركزيّة هي زاوية يكون رأسها في مركز الدّائرة وساقاها هما نصفا قطر في الدّائرة.
زاوية مركزيّة تساوي ضعف كلّ زاوية محيطيّة مبنيّة على نفس القوس.
مثلاً في الرّسم، α هي زاوية مركزيّة و β هي زاوية محيطيّة، والزّاويتان مبنيّتان على نفس القوس AB، لذلك $\alpha = 2\beta$.



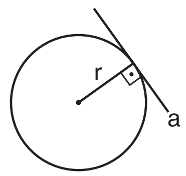
طول القوس

نقطتان على محيط دائرة تحدّدان قوسين.
مثلاً في الرّسم، النّقطتان A و B تحدّدان قوسين: الأولى تلائم الزّاوية المركزيّة α، والثّانية– تلائم الزّاوية المركزيّة β. القوس القصيرة AB هي الّتي تلائم الزّاوية الصّغرى من بين الزّاويتين– α.
طول هذه القوس هو $2\pi r \cdot \frac{\alpha}{360}$ (بحيث أنّ r نصف قطر الدّائرة).



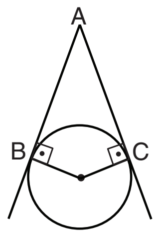
مساحة القطاع

الزّاوية المركزيّة النّاتجة بين نصفَي القطرين الذين يحددان قطاع تُسَمّى أيضًا زاوية رأس.
مثلاً، الجزء الغامق في الرّسم هو قطاع دائرة، زاوية الرّأس فيه $x°$.
مساحة قطاع الدّائرة هي $\pi r^2 \cdot \frac{x}{360}$.



مماسّ في الدّائرة

مماسّ الدّائرة هو مستقيم يمسّ محيط الدّائرة في نقطة واحدة فقط وتُسمّى «نقطة التّماسّ».
الزّاوية النّاتجة بين المماسّ وبين نصف القطر (في نقطة التّماسّ) هي زاوية قائمة.
مثلاً في الرّسم، المستقيم a هو مماسّ الدّائرة الّتي نصف قطرها r.



مستقيمان مماسّان لنفس الدّائرة ويتقاطعان في نقطة واحدة يُسمّيان أيضًا مماسّان لدّائرة يخرجان من نقطة واحدة. طول كلّ واحد من المماسّين هو طول القطعة الّتي تصل بين نقطة تقاطع المماسّين وبين نقطة تماسّ كلّ واحد منهما مع الدّائرة.
مماسّان لدّائرة اللّذان يخرجان من نقطة واحدة متساويان في الطّول.
مثلاً في الرّسم، A هي نقطة التّقاطع، B و C هما نقطتا التّماس، ولذلك AB = AC.

مُضلّع حاصر دائرة

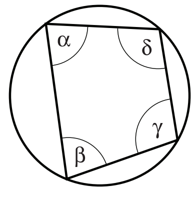
مضلّع حاصر دائرة هو مضلّع كلّ واحدة من أضلاعه هي مماسة للدّائرة.

مُضلّع محصور في دائرة

مضلّع محصور في دائرة هو مضلّع تقع جميع رؤوسه على محيط الدّائرة.

مُثلّث محصور في دائرة

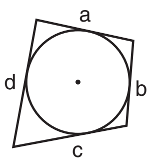
كلّ مثلّث يمكن حصره في دائرة.
لكلّ مُثلّث توجد دائرة واحدة فقط تحصره.
إذا كان المُثلّث المحصور قائم الزّاوية، فإنّ مركز الدّائرة الّتي تحصره يكون منتصف وتر المُثلّث.



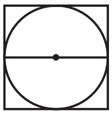
شكل رباعيّ محصور في دائرة

لا يمكن حصر كلّ شكل رباعيّ في دائرة.
في الشّكل الرّباعيّ المحصور داخل دائرة يتحقّق دائمًا أنّ مجموع كلّ زاويتين متقابلتين يساوي $180°$.
مثلاً، في الشّكل الرّباعيّ الّذي في الرّسم $\alpha + \gamma = 180°$
$\beta + \delta = 180°$

شكل رباعيّ حاصر دائرة



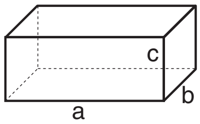
ليس كلّ شكل رباعيّ يمكنه أن يحصر دائرة.
في شكل رباعيّ حاصر دائرة، مجموع كلّ ضلعين متقابلتين متساوٍ.
مثلاً، في الشّكل الرّباعيّ الّذي في الرّسم $a + c = b + d$.



في الحالة الّتي يحصر فيها مربّعٌ دائرةً، يكون طول ضلع المربّع مساويًا لقطر الدّائرة.

أشكال ثلاثيّة الأبعاد (أجسام)

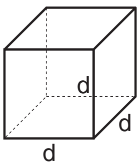
صندوق ومكعّب



صندوق هو جسم ثلاثيّ الأبعاد ذو ستّة أوجه مستطيلة. ثلاثة أبعاد الصّندوق هي الطّول، العرض والارتفاع (في الرّسم a، b و c بالتّتالي).
كل وجه من أوجه الصّندوق معامد للأوجه المجاورة له.

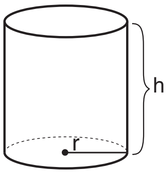
مساحة أوجه الصّندوق هي مجموع مساحات أوجهه. مساحة أوجه الصّندوق في الرّسم هي: $ab + ac + bc + ab + ac + bc = 2ab + 2ac + 2bc$.

حجم صندوق هو حاصل ضرب الطّول في العرض في الارتفاع. حجم الصّندوق المبيّن في الرّسم هو $a \cdot b \cdot c$.



مكعّب هو صندوق فيه الأبعاد الثّلاثة (الطّول، العرض والارتفاع) متساوية.
في المكعّب جميع الأوجه هي مربعات متطابقة.
مساحة كلّ وجه في المكعّب في الرّسم هو d^2، لذلك فإنّ **مساحة أوجه** المُكعّب هي $6d^2$.
حجم المكعّب الّذي في الرّسم d^3.

أسطوانة



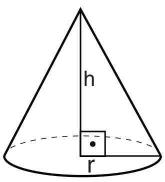
الأسطوانة هي جسم ثلاثيّ الأبعاد مكوّن من قاعدتين دائريّتين متطابقتين موجودتين في مستويين متوازيين، ومن غلاف يصل بينهما. الخطّ الّذي يصل بين مركزيّ القاعدتين هو معامد لكل واحدة من القاعدتين.

مساحة الغلاف لأسطوانة نصف قطر قاعدتها r وارتفاعها h هي حاصل ضرب محيط القاعدة في الارتفاع، أي $2\pi r \cdot h$.

مساحة أوجه الاسطوانة هي مجموع مساحات القاعدتين والغلاف. مساحة كل قاعدة هي πr^2 ومساحة الغلاف $2\pi r \cdot h$، لذلك مساحة الأوجه هي
$2\pi r \cdot h + 2\pi r^2 = 2\pi r \cdot (h + r)$.

حجم الأسطوانة هو حاصل ضرب مساحة إحدى القاعدتين في الارتفاع، أي $\pi r^2 \cdot h$.

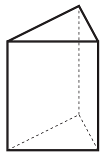
مخروط

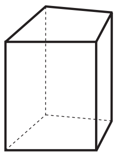


مخروط قائم الزّاوية هو جسم ثلاثيّ الأبعاد ناتج عن وصل النّقاط على محيط دائرة مع نقطة واقعة خارج مستوى هذه الدّائرة. النّقطة تسمى «رأس المخروط» وهي واقعة على المستقيم المعامد لمستوى الدّائرة ويمر عبر مركزها (أنظر الرّسم).

حجم مخروط نصف قطر قاعدته r وارتفاعه h هو $\frac{\pi r^2 \cdot h}{3}$.

منشور





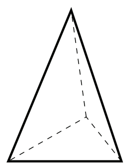
منشور قائم الزّاوية هو جسم ثلاثيّ الأبعاد قاعدتاه مضلّعان متطابقان موجودان في مستويين متوازيين، وأوجهه الجانبيّة هي مستطيلات. كلّ منشور يُسمّى حسب عدد أضلاع قاعدته: منشور ثلاثيّ قاعدتاه مثلّثان، منشور رباعيّ قاعدتاه مربّعان وإلخ (أنظر الرّسومات).

إرتفاع المنشور هو طول القطعة التي تصل بين القاعدتين وتعامِدهما.
هذا هو البُعد بين قاعدتَي المنشور.

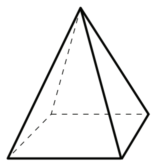
مساحة غلاف المنشور هي مجموع مساحة كلّ الأوجه الجانبيّة. يمكن حساب مساحة الغلاف أيضاً كحاصل ضرب محيط قاعدة المنشور في ارتفاعه.
مساحة أوجه المنشور هي مجموع مساحة الغلاف ومساحتَي القاعدتين في المنشور.

حجم المنشور يساوي حاصل ضرب مساحة إحدى القاعدتين في الارتفاع.

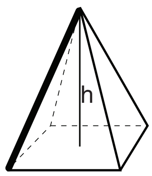
هرم



هرم مستقيم هو جسم ثلاثيّ الأبعاد الّذي ينتج من وصْل رؤوس مُضلّع منتظم ما مع نقطة موجودة خارج مستوى المُضلّع. المُضلّع يُسمّى «قاعدة الهرم» والنقطة تُسمّى «رأس الهرم».



الأوجه الجانبيّة للهرم هي مثلّثات.
كلّ هرم يُسمّى حسب عدد أضلاع قاعدته: هرم ثلاثيّ قاعدته مثلّث، هرم رباعيّ قاعدته مربّع وإلخ (أنظر الرّسومات).



إرتفاع الهرم هو طول القطعة النّازلة من رأس الهرم والمعامدة لمستوى قاعدته. هذا هو بُعد رأس الهرم عن قاعدته (أنظر الرّسم).

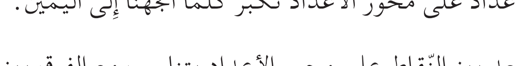
إذا S هي مساحة قاعدة الهرم و h هو ارتفاع الهرم، فإنَّ **حجم** الهرم هو $\frac{S \cdot h}{3}$.

ضلع

ضلع في جسم ثلاثيّ الأبعاد هو المستقيم النّاتج من التقاء وجهين.
في الهرم الظّاهر في الرّسم القطعة المُشار إليها بخطّ مشدّد هي احدى الأضلاع.
في الصّندوق 12 ضلعًا.

محور الأعداد

يستعمل محور الأعداد لعرض هندسي للعلاقات بين الأعداد.

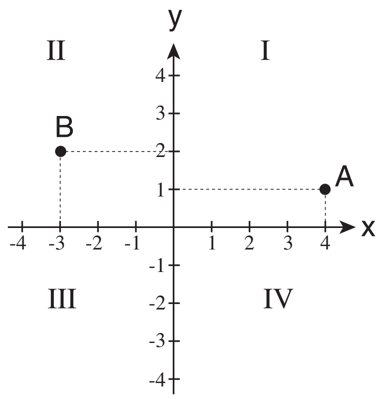


الأعداد على محور الأعداد تكبر كلّما اتّجهنا إلى اليمين.

البُعد بين النّقاط على محور الأعداد يتناسب مع الفرق بين القيَم العدديّة المناسبة للنّقاط.
مثلاً، البُعد بين النّقاط المناسبة للقيَم (4-) و (2-) يساوي البُعد بين النّقاط المناسبة للقيَم 3 و 5.

هيئة المحاور المتعامدة

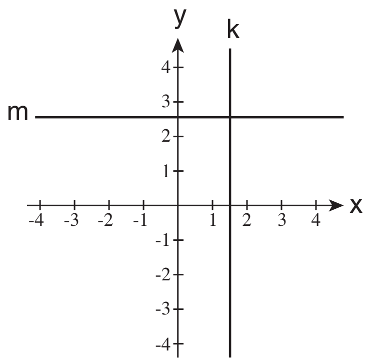
في هيئة المحاور المتعامدة في مستوى يوجد محورا أعداد متعامدان. المحور الأفقيّ يُسمّى محور x، والمحور العموديّ يُسمّى محور y. في المحور x تكبر الأعداد كلّما اتّجهنا يمينًا، وفي المحور y تكبر الأعداد كلّما اتّجهنا إلى أعلى.



المحوران يقسمان المستوى إلى أربعة أرباع، وعادة يشار إليها بأرقام رومانيّة I، II، III، IV.

كلّ نقطة في المستوى تلائم زوجًا مختلفًا من قيم x و y الّتي تحدّد موقعها بالنّسبة للمحاور.
مثلاً في الرّسم، قيمة x للنّقطة A هي 4، وقيمة y لنفس النّقطة هي 1.
قيمة x للنّقطة B هي (-3)، وقيمة y لنفس النّقطة هي 2.

من المتّبع الإشارة لقيَم النّقطة داخل قوسين – قيمة x موجودة على يسار قيمة y، هكذا: (x , y). أحياناً نشير الى قيم النّقطة بمحاذاة الحرف الّذي يمثّلها، مثلاً A(4 , 1) ، B(-3 , 2).
أحيانًا تُسمّى قيَم النّقطة (x,y) **بإحداثيّات النّقطة**.
النّقطة في المستوى الملائمة لـ (0 , 0) هي نقطة التقاء المحاور، وتسمّى **نقطة الأصل**.

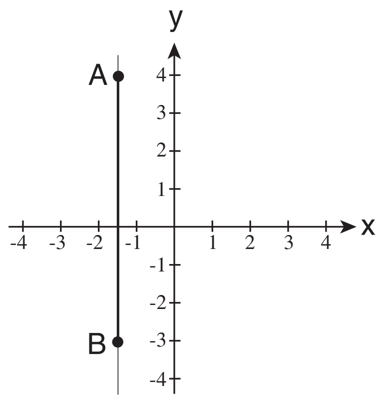


لجميع النّقاط الّتي تقع على مستقيم موازٍ للمحور x نفس قيمة y، ولجميع النّقاط الّتي تقع على مستقيم موازٍ لمحور y نفس قيمة x.

مثلاً في الرّسم،
المستقيم k موازٍ للمحور y، ولذلك لكلّ النّقاط على المستقيم k توجد نفس القيمة لـ x (في الرّسم x = 1.5).

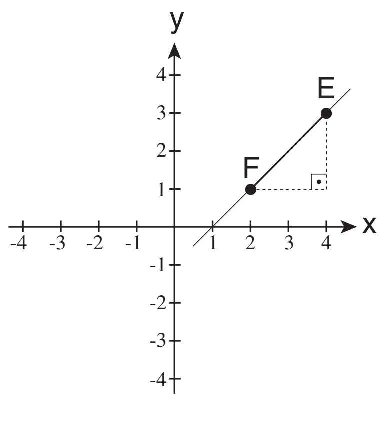
المستقيم m موازٍ للمحور x، ولذلك لكلّ النّقاط على المستقيم m توجد نفس القيمة لـ y (في الرّسم y = 2.5).

عبر كلّ نقطتين في المستوى يمرّ مستقيم واحد فقط.
جزء المستقيم نفسه الموجود بين النّقطتين يسمّى قطعة.



إذا كانت القطعة موازية للمحور y، عندها يكون طولها هو الفرق (بالقيمة المطلقة) بين قيم y الملائمة للنّقاط.
مثلاً في الرّسم، القطعة AB موازية لمحور y.
قيمة y للنّقطة A هي 4 وقيمة y للنّقطة B هي (-3).
الفرق بين قيَم y هو 7 = (-3) – 4، ولذلك طول القطعة AB هو 7.

بنفس الطّريقة نحسب طول قطعة موازية لمحور x.



إذا كانت القطعة لا توازي أحد المحورين (مثلاً القطعة EF في الرّسم)، يمكن حساب طولها بواسطة نظريّة فيثاغورس: نرسم مُثلّثًا قائم الزّاوية يكون الوتر فيه هو القطعة، وقائماه موازيَيْن للمحور x وللمحور y.
طول القائم الموازي للمحور x يساوي الفرق بين قيمة x للنّقطة E وقيمة x للنّقطة F (2 = 2 – 4)، وطول القائم الموازي للمحور y يساوي الفرق بين قيمة y للنّقطة E وقيمة y للنّقطة F (2 = 1 – 3).
بواسطة نظريّة فيثاغورس يمكن حساب طول الوتر:
$EF = \sqrt{2^2+2^2} = \sqrt{8}$.

قاموس مصطلحات رياضيّة عبريّ - عربيّ

א

אופקי .... أفقيّ
אורך .... طول
אחוז .... نسبة مئويّة
אי-זוגי .... فرديّ
אי-שוויון .... متباينة، تبايُن
איבר .... عنصر، حدّ
אין-סוף .... لا نهاية
אלכסון .... قطر
אמצע .... وسط، منتصف
אנכי .... عموديّ

ב

באקראי .... بشكل عشوائيّ
בהכרח .... بالضّرورة
ביטוי .... تعبير
בסיס .... قاعدة
בסיס החזקה .... قاعدة القوّة
בקירוב .... بالتّقريب، تقريبًا

ג

גדול ב-3 .... أكبر بـ 3
גדול פי 3 .... يساوي 3 مرّات (أضعاف)
גובה .... إرتفاع
גודל .... كِبَر، مقدار
גורם .... عامل
גזרה .... قطاع
גליל .... أسطوانة
גרף .... رسم بيانيّ

ד

דלתון .... دالتون
דמיון .... تشابه
דרך .... مسافة

ה

הופכי .... مقلوب
היקף .... محيط
הספק .... قدرة
הסתברות .... إحتمال
העלאה בחזקה .... رفع للقوّة
הפרש .... فرق، فارق
הצבה .... تعويض

ז

זוגי .... زوجيّ
זווית .... زاوية
- זווית היקפית .... زاوية محيطيّة
- זווית חדה .... زاوية حادّة
- זווית חיצונית .... زاوية خارجيّة
- זווית ישרה .... زاوية قائمة
- זווית מרכזית .... زاوية مركزيّة
- זווית פנימית .... زاوية داخليّة
- זווית קהה .... زاوية منفرجة
- זוויות משלימות .... زوايا متكاملة
- זוויות מתאימות .... زوايا متناظرة
- זוויות מתחלפות .... زوايا متبادلة
- זוויות נגדיות .... زوايا متقابلة
- זוויות קדקודיות .... زوايا متقابلة بالرّأس

ח

חוסם .... يحصر، حاصر
חופף .... يتطابق، مطابق، متطابق
חוצה .... يُنصّف، مُنصّف
חוצה-זווית .... مُنصّف زاوية
חותך .... يقطع، قاطع
חזקה .... قوّة
חיבור .... جمع
חיובי .... موجب
חילוק .... قسمة
חיסור .... طرح، تنقيص
חסום .... محصور
חרוט .... مخروط

ט

טבלה .... جدول
טווח .... مدى
טענה .... إدّعاء
טרפז .... شبه منحرف

י

יחס .... نسبة، تناسب أو علاقة
ישר .... مستقيم
ישר-זווית .... قائم الزّاوية
יתר .... وتر

כ

כדור .... كرة
כלוא .... محصور
כפולה .... مُضاعَف
כפל .... ضرب
כפל מקוצר .... ضرب مختصر

מ

מאונך .... يُعامد، عموديّ
מהירות .... سرعة
מונה .... بسْط
מחומש .... مخمّس
מחומש משוכלל .... مخمّس منتظم
מחלק .... يقسم، قاسم
מטבע הוגן .... قطعة نقديّة منصِفة أو نزيهة
מינימום .... حدّ أدنى، نهاية صغرى
מינימלי .... أدنى حدّ، أصغر ما يمكن
מישור .... مستوى
מיתר .... وتر
מכנה .... مقام
מכנה משותף .... مقام مشترك
מכפלה .... حاصل الضّرب
מלבן .... مستطيل
ממוצע .... معدّل
ממוצע חשבוני .... معدّل حسابيّ
ממוצע משוקלל .... معدّل موزون / كلّيّ
מנה .... خارج القسمة
מנסרה .... منشور
מנסרה משולשת .... منشور ثلاثيّ
מספר .... عدد
מספר אי-זוגי .... عدد فرديّ
מספר דו-ספרתי .... عدد ثنائيّ المنزلة
.... أو مكوّن من رقمين
מספר זוגי .... عدد زوجيّ
מספר ראשוני .... عدد أوّليّ
מספר שלם .... عدد صحيح
מספר תלת-ספרתי .... عدد ثلاثيّ المنزلة
.... أو مكوّن من ثلاثة أرقام
מספרים עוקבים .... أعداد متعاقبة
מעגל .... دائرة
מעוין .... معين
מעטפת .... غلاف
מעלה (°) .... درجة (°)
מעריך החזקה .... أسّ
מצולע .... مضلّع
מצולע משוכלל .... مضلّع منتظم
מצטמצם .... يختزل
מקביל .... يُوازي، مواز
מקבילית .... متوازي الأضلاع
מקסימום .... حدّ أعلى، حدّ أقصى، نهاية عظمى
מקסימלי .... أعلى حدّ، أكبر ما يمكن
מקצוע .... ضلع
מרובע .... شكل رباعيّ

מרכז .... مركز
משוואה .... معادلة
משולש .... مثلّث
משולש חד-זווית .... مثلّث حادّ الزّاوية
משולש ישר-זווית .... مثلّث قائم الزّاوية
משולש קהה-זווית .... مثلّث منفرج الزّاوية
משולש שווה-צלעות .... مثلّث متساوي الأضلاع
משולש שווה-שוקיים .... مثلّث متساوي السّاقين
משושה .... مسدّس
משושה משוכלל .... مسدّس منتظم
משותף .... مشترك
משיק .... مماسّ
משפט פיתגורס .... نظريّة فيثاغورس
משתנה .... متغيّر
מתומן .... مثمّن
מתומן משוכלל .... مثمّن منتظم
מתחלק .... ينقسم
מתחלק ללא שארית .... ينقسم بدون باقٍ
מתלכד .... يتكتّل
מתקיים .... يتحقّق

נ

נובע .... ينتج ، ينبع
נוסחה .... معادلة، قانون
נחתך .... يُقطَع، ينقطع
ניצב .... يُعامد، عمود، عموديّ
ניצב (במשולש ישר זווית) .... قائم (في مثلّث قائم الزّاوية)
נפח .... حجم
נקודה .... نقطة
נקודת חיתוך .... نقطة تقاطع
נתון .... معطى

ס

סדרה .... متوالية
סיכוי .... إحتمال
סימן .... إشارة، علامة
סך הכול .... مُجمل، مجموع
סכום .... مجموع
ספרה .... رقم، منزلة
ספרת אחדות .... منزلة الآحاد
ספרת עשרות .... منزلة العشرات
ספרת מאות .... منزلة المئات
סרטוט .... رسم، تخطيط

ע

עוקב .... متتالي، متعاقب
עיגול .... دائرة
n עצרת (!) .... مضروب الـ n (!)، Factorial
ערך .... قيمة
ערך מוחלט .... قيمة مطلقة

פ

פאה .... وجه
פירמידה .... هرم
פעולה .... عمليّة
פרופורציה .... تناسب
פתרון .... حلّ

צ

צורה .... شكل
ציר .... محور
צירוף .... تركيب
צלע .... ضلع

ק

קבוע .... ثابت
קבוצה .... مجموعة
קדקוד .... رأس
קו .... خط
קו ישר .... خط مستقيم
קובייה .... مكعّب
קובייה הוגנת .... مكعّب مُنْصِف أو نزيه (نرد)
קוטר .... قطر
קומבינטוריקה .... مجموعة توافقيّة
קטום .... مقطوم
קטע .... قطعة
קיים .... موجود
קנה מידה .... مقياس رسم

קרן .... شعاع
קשת .... قوس

ר

ראשוני .... أوّليّ
רדיוס .... نصف قطر
רוחב .... عرض
ריבוע .... مربّع

ש

שארית (החלוקה) .... باقي (القسمة)
שבר .... كسر
שווה .... يساوي، متساوٍ
שווה-צלעות .... متساوي الأضلاعً
שווה-שוקיים .... متساوي السّاقين
שוקיים .... ساقان
שורש .... جذر
שורש ריבועי .... جذر تربيعيّ
שטח .... مساحة
שטח מעטפת .... مساحة غلاف
שטח פנים .... مساحة أوجه
שלילי .... سالب
שלם (מספר) .... صحيح (عدد)

ת

תחום .... مجال
תיבה .... صندوق
תיכון .... متوسّط
תרשים .... تخطيط، رسم بيانيّ

مسائل رياضيّة

تُعالج الأسئلة من مجال الجّبر عدّة مواضيع: معادلات، مسافة، قدرة، تركيبات، احتمالات وغير ذلك. تُعالج الأسئلة من مجال الهندسة مميّزات الأشكال الهندسيّة: مساحة، حجم، زوايا وغير ذلك. بعض الأسئلة كلاميّة، يجب فيها أوّلاً ترجمة المسألة إلى تعابير رياضيّة؛ وأسئلة أخرى غير كلاميّة، تُعرض المسألة فيها منذ البداية بتعابير رياضيّة. أمامك نماذج أسئلة، وفي ذيل كلّ سؤال شرحٌ لحلّه.

إنتبه: الأمثلة في هذا الكرّاس مصنّفة حسب أنواع ولكنّ هذا التّقسيم غير موجود في الامتحان.

مسائل جبر كلاميّة

1. سافر سائق من حيفا إلى إيلات خلال فترة زمنيّة معيّنة. إجتاز السّائق ثلث المسافة بسرعة 75 كم/ساعة، واجتاز خُمس المسافة المتبقيّة خلال ساعة، أمّا بقيّة المسافة فاجتازها بسرعة 80 كم/ساعة. المسافة بين حيفا وإيلات هي 450 كم. لو سافر السّائق بسرعة ثابتة على طول كلّ المسافة، فبأيّ سرعة كان عليه أن يسافر كي تستغرق السّفرة من حيفا إلى إيلات نفس الفترة الزّمنية بالضّبط؟

(1) 70 كم/ساعة
(2) 75 كم/ساعة
(3) 80 كم/ساعة
(4) 90 كم/ساعة

هذا السّؤال معروض بصورة كلاميّة، لذلك عليك أن تترجمه في البداية إلى تعابير رياضيّة. أوّلاً، نحدّد بشكل واضح ماذا علينا أن نجد: **السّرعة** الّتي يجب السّفر بها لاجتياز **المسافة** بين حيفا وإيلات بنفس **الزّمن** الّذي احتاجه السّائق.

إذن، هذا سؤال مسافة، ويمكن أن نطبّق عليه القانون الّذي يربط بين المسافة، السّرعة والزّمن: $v = \frac{s}{t}$ ، إذ إنّ المسافة (s) معطاة، والزّمن (t) يمكن حسابه، والسّرعة (v) هي المجهول الّذي يجب إيجاده.

معطى في السّؤال أنّ المسافة بين إيلات وحيفا هي 450 كم.

الزّمن الكلّي الّذي احتاجه السّائق كي يجتاز كلّ المسافة من حيفا إلى إيلات يمكن حسابه بالطّريقة التّالية:
المسافة في السّؤال مقسّمة إلى ثلاثة مقاطع. نحسب الزّمن الّذي احتاجه السّائق لاجتياز كلّ مقطع.

أ. ثلث الطّريق هو **150 كم**، لأنّ $\frac{1}{3} \cdot 450$ يساوي 150. هذا المقطع من الطّريق اجتازه السّائق **بساعتين**، لأنّ اجتياز مسافة 150 كم بسرعة 75 كم/ساعة يتطلّب ساعتين $\left(\frac{150}{75} = 2\right)$.

ب. خُمس الطّريق المتبقيّة هو **60 كم**، لأنّ طول الطّريق المتبقيّة هو $450 - 150 = 300$ ، و $\frac{1}{5} \cdot 300$ يساوي 60.
مُعطى في السّؤال أنّ السّائق اجتاز هذا المقطع من المسافة في **ساعة واحدة**.

ج. بقيّة الطّريق هي **240 كم**، لأنّ $450 - 150 - 60 = 240$. اجتاز السّائق هذا المقطع **بثلاث ساعات**، لانّ اجتياز 240 كم بسرعة 80 كم/ساعة يتطلّب ثلاث ساعات.

في الخلاصة، استغرق السّفر من حيفا إلى إيلات ما مجمله 6 ساعات (ساعتين وساعة وثلاث ساعات).
الآن يمكن حساب السّرعة الثّابتة الّتي يجب السّفر بها لاجتياز مسافة 450 كم بـ **6 ساعات**، وذلك بواسطة تعويض المعطيات في القانون الملائم: $v = \frac{s}{t} = \frac{450}{6} = 75$. أي أنّ السّرعة تساوي 75 كم/ ساعة، والإجابة الصّحيحة هي (2).

2. في اليوم العاشر من حياته أكل فيلٌ 5 حبّات حلوى. إزدادت شهيّته من هذا العمر فصاعدًا، وفي كلّ يوم أكل ضعفَي حبّات الحلوى الّتي أكلها في اليوم السّابق.
كم حبّة حلوى أكل الفيل في اليوم الـ 14 من حياته؟

(1) 40 (2) 80 (3) 100 (4) 120

في اليوم العاشر أكل الفيل 5 حبّات حلوى. بما أنّه من هذا اليوم فصاعدًا أكل كلّ يوم ضعفَي حبّات الحلوى الّتي أكلها في اليوم السّابق، إذن، في اليوم الـ 11 أكل 10 حبّات حلوى ($5\cdot2$)، في اليوم الـ 12 أكل 20 حبّة حلوى ($5\cdot2\cdot2$) وهكذا دواليك.
بشكلٍ عامّ، في اليوم ($10+n$) أكل الفيل $5\cdot2^n$ حبّات حلوى (n هو عدد صحيح وموجب).
لذلك، في اليوم الـ 14 أكل 80 حبّة حلوى ($5\cdot2^4 = 80$)، والإجابة الصّحيحة هي (2).

---

3. في أحد المطاعم يمكن اختيار نوع سلطة واحد من بين 3 أنواع مختلفة، وواحدة من 4 وجبات رئيسيّة مختلفة. إضافةً للسّلطة والوجبة الرّئيسيّة، يمكن الاختيار كحلوى: كعكة أو بوظة.
ما هو عدد التّشكيلات المختلفة لوليمة مؤلّفة من 3 وجبات (سلطة، وجبة رئيسية وحلوى) يمكن تشكيلها في هذا المطعم؟

(1) 12 (2) 14 (3) 18 (4) 24

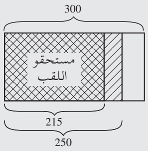
هنالك **ثلاث** إمكانيّات لاختيار سلطة. لكلّ سلطة يتمّ اختيارها يمكن أن تُضَمَّ إحدى **أربع** الوجبات الرّئيسيّة المختلفة. أي، يوجد $3\cdot4$ من التّشكيلات المختلفة لسلطة ووجبة رئيسيّة. لكلّ واحدة من 12 التّشكيلات هذه يمكن إضافة كعكة أو بوظة. اي بالمجمل توجد $12\cdot2$ تشكيلة مختلفة لثلاث وجبات، وهي 24 إمكانيّة. لذلك، الإجابة الصّحيحة هي (4).

---

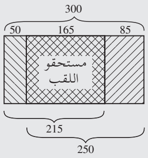
4. يستحقّ الطّالب لقب .B.A فقط إذا اجتاز جميع الامتحانات وقدّم جميع الوظائف. من ضمن 300 طالب، 250 اجتازوا جميع الامتحانات و 215 قدّموا جميع الوظائف.
كم طالبًا يستحقّ لقب .B.A؟

(1) على الأقلّ 215
(2) على الأكثر 185
(3) بالضّبط 215
(4) على الأقلّ 165

يمكن ان نُعرّف مجموعتين من الطّلاب: مجموعة الطّلاب الّذين اجتازوا جميع الامتحانات ومجموعة الطّلاب الّذين قدّموا جميع الوظائف. كل طالب موجود في كلتي المجموعتين يستحقّ اللّقب. مدى التّطابق بين المجموعتين غير معروف، ولكن هنالك وضعان قصويّان ممكنان. تُمثّلهما في الرّسم:



- في حالة **تطابق أقصى** بين المجموعتين، يكون عدد المستحقّين للّقب هو الأقصى. تطابق أقصى يحصل إذا كان جميع الـ 215 طالبًا الّذين قدّموا جميع الوظائف اجتازوا أيضًا جميع الامتحانات. أي أنّ 215 طالبًا **على الأكثر** يستحقّون اللّقب.



- في حالة **تطابق أدنى** بين المجموعتين، يكون عدد مستحقّي اللّقب هو الأدنى. 50 طالبًا (250 − 300) لا يستحقّون اللّقب لأنّهم لم يجتازوا جميع الامتحانات، و 85 طالبًا (215 − 300) لا يستحقّون اللّقب لأنّهم لم يقدّموا جميع الوظائف. أي، عدد غير المستحقّين، لأيّ من السّببين أعلاه هو 135 = 85 + 50.
هذا هو عدد غير المستحقّين الأقصى. لذلك عدد المستحقّين الأدنى هو 165 = 135 − 300.
أي، 165 طالبًا **على الأقلّ** يستحقّون اللّقب.

فإذن، عدد المستحقّين للقب .B.A يمكن أن يتراوح بين 165 و 215. ولذلك فالإجابة الصّحيحة هي (4).

.5 مصنع يعمل بإيقاع ثابت يقوم بإنتاج 20 سيّارة بـ 4 أيام. كم سيّارة يمكن إنتاجها في 3 مصانع كهذه والّتي تعمل بنفس الإيقاع، خلال 6 أيام؟

(1) 60
(2) 80
(3) 90
(4) 120

هذا السّؤال هو سؤال في القدرة. إحدى الطّرق لحلّ أسئلة من هذا النّوع هي إيجاد القدرة لوحدة إنتاج واحدة (في هذه الحالة، مصنع واحد) في وحدة زمن واحدة (في هذه الحالة، يوم واحد)، وعندها الضّرب في عدد وحدات الإنتاج (3 مصانع) وفي عدد وحدات الزّمن (6 أيام) المطلوبة. إذا كان المصنع يُنتج 20 سيّارة بـ 4 أيام، فإنّه يُنتج في كل يوم 5 سيّارات $\left(5 = \frac{20}{4}\right)$. فإذن، 3 مصانع تُنتج في 6 أيام $6 \cdot 3 \cdot 5$ سيّارات، أي 90 سيّارة، والإجابة الصّحيحة هي (3).

.6 في علبة معيّنة توجد 20 قبّعة بيضاء و 13 قبّعة سوداء. أخرجَ يعقوب من العلبة عشوائيًّا 3 قبّعات الواحدة تلو الأخرى، دون أن يُعيدها إلى العلبة، والقبّعات الثّلاث كانت سوداء.
ما هو الاحتمال أن تكون القبّعة الرّابعة التي يُخرجها عشوائيًّا هي أيضًا سوداء؟

(1) $\frac{13}{33}$ (2) $\frac{10}{33}$ (3) $\frac{1}{3}$ (4) $\frac{1}{33}$

عليك حساب احتمال أن يخرج يعقوب قبّعة سوداء، بعد أن أُخرجت ثلاث قبّعات سوداء. الاحتمال لذلك هو عدد القبّعات السّوداء الّتي بقيت في العلبة مقسومًا على عدد جميع القبّعات (سوداء وبيضاء) الّتي بقيت في العلبة.
بعدَ أن أُخرجَت 3 قبّعات سوداء، بقيت في العلبة 10 قبّعات سوداء و 20 قبّعة بيضاء، أي أنّه: من بين القبّعات الـ 30 الموجودة في العلبة توجد 10 قبّعات سوداء. لذلك، الاحتمال أن يُخرج يعقوب الآن قبّعة سوداء هو $\frac{1}{3} = \frac{10}{30}$، والإجابة الصّحيحة هي (3).

مسائل جبر غير كلاميّة

1. معطى: $2^x \cdot 2^y = 32$

$x + y = ?$

(1) 8
(2) 7
(3) 5
(4) 4

حسب قوانين القوى، في عمليّة ضرب قوى ذات القاعدة نفسها يمكن جمع قيم الإساس، لذلك $2^x \cdot 2^y = 2^{x+y}$ ولذلك بحسب المعطى $2^{x+y} = 32$. لكي نستطيع إيجاد قيمة التّعبير $x + y$ ، علينا أن نعبّر عن 32 كقوّة تكون قاعدتها 2: $32 = 2^5$. من هنا يكون $2^{x+y} = 2^5$. عندما تكون قوّتان متساويتين ولهما نفس القاعدة فإنّ أساسيهما يكونان أيضًا متساويين، ولذلك $x + y = 5$. الإجابة الصّحيحة هي (3).

2. معدّل الأعداد الثّلاثة x، y و z هو $x \cdot y$.

$z = ?$

(1) $3 \cdot x \cdot y - x - y$
(2) $x \cdot y - x - y$
(3) $3 \cdot x \cdot y + x + y$
(4) $3 \cdot x \cdot y - (x - y)$

المعدّل هو مجموع الحدود مقسومًا على عددها، ولذلك فالمعدّل لـ x، y و z هو $\frac{x+y+z}{3}$.
نعوّض في المعادلة المعطيات الّتي في السّؤال: $\frac{x+y+z}{3} = x \cdot y$ ؛ نضرب طرفي المعادلة في 3:
$x + y + z = 3 \cdot x \cdot y$ ؛ ونعزل z: $z = 3 \cdot x \cdot y - x - y$.
لذلك فالإجابة الصّحيحة هي (1).

3. لكلّ عددين a و b عُرّفت العمليّة $ على النّحو التّالي:

$\$(a , b) = a \cdot (a + b)$

$\$(\$(2 , 0) , 1) = ?$

(1) 20 (2) 12 (3) 10 (4) 4

في التّعبير $\$(\$(2 , 0) , 1)$ ، الّذي يجب إيجاد قيمته، $a = \$(2 , 0)$ ، $b = 1$.
بحسب تعريف العمليّة: $\$(\$(2 , 0) , 1) = \$(2 , 0) \cdot (\$(2 , 0) + 1)$.
إذن، لأجل حساب قيمة التّعبير المطلوبة يجب أوّلاً حساب $\$(2 , 0)$.
بحسب تعريف العمليّة: $\$(2 , 0) = 2 \cdot (2 + 0) = 4$.
نعوّض القيمة الّتي حصلنا عليها عن $\$(2 , 0)$ في التّعبير المطلوب، فنحصل على: $\$(\$(2 , 0) , 1) = \$(4 , 1)$.
بحسب تعريف العمليّة: $\$(4 , 1) = 4 \cdot (4 + 1) = 20$ ، والإجابة الصّحيحة هي (1).

.4 معطى: $B < C$
$B < D < A$

أيّ الإمكانيّات التّالية صحيحة بالضّرورة؟

(1) $C < D$
(2) $D < C$
(3) $C < A$
(4) لا توجد إمكانيّة من الإمكانيّات المذكورة أعلاه، صحيحة بالضّرورة

لا يمكن استنتاج شيء من المعطيات فيما يخصّ تناسب الكبر بين كلّ من C و A و D. ثلاثة أوضاع ممكنة بحسب المعطيات:
أ. $B < C < D < A$
ب. $B < D < C < A$
ج. $B < D < A < C$
الإمكانيّة (1) صحيحة في الحالة «أ»، ولكن ليس في الحالتين «ب» و «ج». الإمكانيّة (2) صحيحة في الحالتين «ب» و «ج»، لكن ليس في الحالة «أ». الإمكانيّة (3) صحيحة في الحالتين «أ» و «ب»، لكن ليس في الحالة «ج». فإذن، كلّ واحدة من الإمكانيّات قد تكون صحيحة في حالات معيّنة، وقد تكون خاطئة في حالات أخرى.
لذلك لا توجد إمكانيّة من الإمكانيّات (1)–(3) صحيحة **بالضّرورة**، والإجابة الصّحيحة هي (4).

.5 K هو عدد زوجيّ، و P هو عدد فرديّ.

أيّ الادّعاءات التّالية **غير** صحيح؟

(1) $P - K - 1$ هو عدد فرديّ
(2) $P + K + 1$ هو عدد زوجيّ
(3) $P \cdot K + P$ هو عدد فرديّ
(4) $P^2 + K^2 + 1$ هو عدد زوجيّ

نفحص كلّ واحد من الادّعاءات:
(1) الفرق بين عدد فرديّ (P) وبين عدد زوجيّ (K) هو عدد فرديّ، ولذلك $P - K$ هو عدد فرديّ.
إذا طرحنا 1 من العدد الفرديّ الّذي حصلنا عليه، نحصل على عدد زوجيّ.
لذلك $P - K - 1$ هو عدد **زوجيّ**، والادّعاء **غير** صحيح.

(2) مجموع عدد فرديّ (P) وعدد زوجيّ (K) هو عدد فرديّ، ولذلك $P + K$ هو عدد فرديّ. إذا أضفنا 1 إلى العدد الفرديّ الّذي حصلنا عليه، نحصل على عدد زوجيّ. لذلك $P + K + 1$ هو عدد **زوجيّ**، والادّعاء **صحيح**.

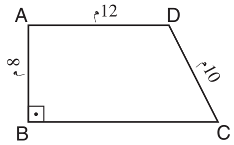
(3) حاصل ضرب عدد زوجيّ في أيّ عدد صحيح هو دائمًا زوجيّ، لذلك حاصل عمليّة الضرب $P \cdot K$ هو عدد زوجيّ. إذا أضفنا إلى حاصل الضّرب الزّوجيّ الّذي حصلنا عليه العدد الفرديّ P ، نحصل على عدد فرديّ.
لذلك $P \cdot K + P$ هو عدد **فرديّ**، والادّعاء **صحيح**.

(4) تربيع عدد فرديّ (P^2) هو عدد فرديّ، لأنه عبارة عن حاصل ضرب عدد فرديّ في عدد فرديّ ($P \cdot P$)، وتربيع عدد زوجيّ (K^2) هو عدد زوجيّ، لأنّه عبارة عن حاصل ضرب عدد زوجيّ في عدد زوجيّ ($K \cdot K$). مجموع التّربيعين ($P^2 + K^2$) هو عدد فرديّ لأنه مجموع عدد فرديّ وعدد زوجيّ، لذلك، عندما نضيف له 1 نحصل على عدد زوجيّ. $P^2 + K^2 + 1$ هو إذن عدد **زوجيّ**، والادّعاء **صحيح**.

في هذا السّؤال عليك أن تشير إلى الادّعاء **غير** الصّحيح، لذلك، (1) هي الإجابة الصّحيحة.

أسئلة هندسة

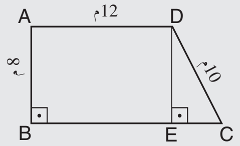
1. يظهر في الرّسم الّذي أمامك شبه منحرف قائم الزّاوية $(AD \parallel BC)$.



بموجب هذه المعطيات والمعطيات الّتي في الرّسم،
ما هي مساحة شبه المنحرف (بالـ م^2)؟

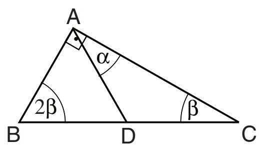
(1) 150
(2) 120
(3) 108
(4) 96

قانون حساب مساحة شبه منحرف إحدى قاعدتيه a ، قاعدته الأخرى b وارتفاعه h هو: $S = \frac{(a+b)\cdot h}{2}$.
شبه المنحرف المعطى قائم الزّاوية ولذلك فإنّ ساقه المعامدة للقاعدتين تساوي ارتفاع شبه المنحرف. معطى في الرّسم الارتفاع وطول القاعدة الصّغرى، لكن غير معطى طول القاعدة الكبرى. لكي نحسب طول القاعدة الكبرى نُنزل عمودًا من نقطة D إلى القاعدة BC (DE في الرّسم التّالي). نحصل على مستطيل $ABED$ طوله 12م وعرضه 8م، لذلك فإنّ $BE = 12$ و $DE = 8$.
لايجاد طول القاعدة الكبرى لشبه المنحرف بقي فقط أن نحسب طول EC.
يمكن حسابه بالاستناد الى نظريّة فيثاغورس. في المُثلّث القائم الزّاوية DEC: $DC^2 = DE^2 + EC^2$
نعزل EC: $EC = \sqrt{DC^2 - DE^2}$
نعوّض المعطيات: $EC = \sqrt{10^2 - 8^2} = 6$



إذن، طول القاعدة الكبرى هو 18م (6م + 12م).
نحسب مساحة شبه المنحرف: $S = \frac{(12+18)\cdot 8}{2} = 120$
إذن، مساحة شبه المنحرف هي 120م^2، والإجابة الصّحيحة هي (2).

2. في الرّسم الذي أمامك، ABC هو مثلّث قائم الزّاوية و ABD هو مثلّث متساوي السّاقين $(AB = AD)$.

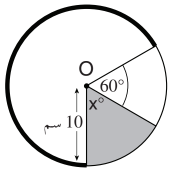


حسب هذه المعطيات ومعطيات الرّسم،
$\alpha = ?$

(1) $60°$
(2) $45°$
(3) $30°$
(4) $25°$

مجموع زوايا المثلّث هو $180°$. لذلك، في المُثلّث ABC: يتحقّق $180° = \beta + 2\beta + 90°$.
نحلّ المعادلة ونحصل على $\beta = 30°$.
معطى أنّ المُثلّث ABD متساوي السّاقين. ينتج من ذلك أنّ $\measuredangle ABD = \measuredangle ADB$.
$\measuredangle ABD = 2\beta = 60°$ ولذلك فإنّ $\measuredangle ADB = 60°$ أيضًا.
في المثلّث ABD يتحقّق $\measuredangle BAD + \measuredangle ABD + \measuredangle ADB = 180°$ ، أي $\measuredangle BAD = 180° - \measuredangle ABD - \measuredangle ADB$.
نعوّض قِيَم الزّوايا الّتي حسبناها فنحصل على $\measuredangle BAD = 180° - 60° - 60° = 60°$.
حسب الرّسم، $\measuredangle BAD + \alpha = \measuredangle BAC$. نعوّض قِيَم الزّوايا المعروفة ونحصل على $60° + \alpha = 90°$. لذلك $\alpha = 30°$ ، والإجابة الصّحيحة هي (3).

3. في الرّسم الّذي أمامك دائرة مركزها O ونصف قطرها 10 سم.
معطى: المساحة الغامقة مساوية لـ $\frac{1}{6}$ مساحة الدّائرة.



بناءً على هذه المعطيات ومعطيات الرّسم، ما هو طول القوس المشدّدة (بالسم)؟

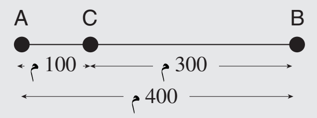
(1) 30π (2) $\frac{40}{3}\pi$ (3) $\frac{20}{3}\pi$ (4) 20π

طول القوس المشدّدة يساوي محيط الدّائرة كلّه ناقص طول القوس غير المشدّدة. حتى نجد طول القوس غير المشدّدة علينا أن نجد قيمة الزّاوية المركزيّة المبنيّة عليها. قيمة هذه الزّاوية $x°+60°$ (كما هو معطى في الرّسم). x هي زاوية رأسيّة للقطاع الغامق، ونستطيع معرفة قيمتها بالاستعانة بقانون مساحة قطاع الدّائرة: $\pi r^2 \cdot \frac{x}{360}$.
معطى أنّ مساحة القطاع الغامق تساوي $\frac{1}{6}$ مساحة الدّائرة، أي تساوي $\frac{\pi r^2}{6}$ (حيث أنّ مساحة الدّائرة كلّها تساوي πr^2)،
ولذلك نحصل على المعادلة $\pi r^2 \cdot \frac{x}{360} = \frac{\pi r^2}{6}$. نختزل طرفي المعادلة بـ πr^2: $\frac{x}{360} = \frac{1}{6}$،
ونعزل x: $x = \frac{360}{6} = 60$. لذلك فإنّ قيمة الزّاوية المبنيّة عليها القوس غير المشدّدة هي $x°+60° = 60° + 60° = 120°$، وطول القوس المبنيّة عليها هذه الزّاوية هو $2\pi r \cdot \frac{120}{360} = 2\pi r \cdot \frac{1}{3}$، أي $\frac{1}{3}$ محيط الدّائرة.
لذلك، طول القوس المشدّدة هو $\frac{2}{3}$ محيط الدّائرة.
محيط الدّائرة (بالسم) هو $2\pi r = 2\pi \cdot 10 = 20\pi$ ولذلك $\frac{2}{3}$ من محيط الدّائرة هو $\frac{2}{3} \cdot 20\pi = \frac{40\pi}{3}$.
أي أنّ، طول القوس المشدّدة هو $\frac{40\pi}{3}$ سم، والإجابة الصّحيحة هي (2).

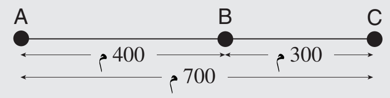
4. البعد بين النّقطتين A و B هو 400 متر. البعد بين النّقطتين B و C هو 300 متر.
من هنا ينتج أنّ البعد بين النّقطتين A و C هو **بالضّرورة** –

(1) 100 متر   (2) 500 متر   (3) 700 متر   (4) لا يمكن المعرفة من المعطيات

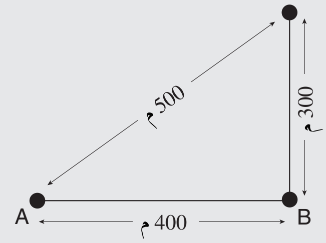
لا تزوّدنا المعطيات في هذا السّؤال بمعلومات حول المكان النّسبيّ للنّقاط الثّلاث، وحالات كثيرة ممكنة، مثلاً:



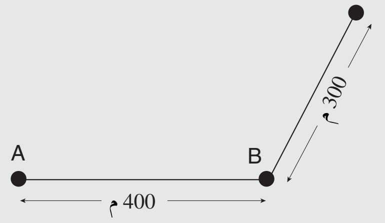
يلائم الإجابة (1)



يلائم الإجابة (3)



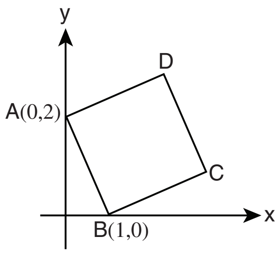
يلائم الإجابة (2)



لا يلائم أي إجابة من الإجابات (1) – (3)

جميع هذه الحالات ممكنة، كما وحالات كثيرة أخرى، إلّا أنّه ولا واحدة منها تتحقق بالضّرورة.
لذلك الإجابة الصّحيحة هي (4).

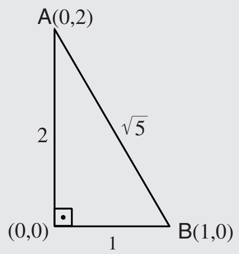
5. في هيئة المحاور الّتي أمامك معطى مربّع ABCD .



ما هي مساحة المربّع؟

(1) لا يمكن المعرفة من المعطيات
(2) 6
(3) 5
(4) 4

من أجل حساب مساحة المربّع يجب إيجاد طول ضلعه. طول الضّلع هو البعد بين كلّ رأسين محاذيين، مثلاً، A و B . وبما أنّ المقطع AB لا يوازي أيًّا من المحورين، نحسب طوله بالاستناد إلى نظريّة فيثاغورس.



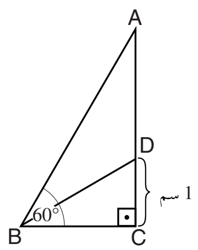
نقطة الأصل والنّقطتان A و B تشكّل مثلّثًا قائم الزاوية وتره هو AB. طول القائم الأوّل هو البعد بين نقطة الأصل $(0،0)$ والنّقطة $A(0،2)$ ، أي 2، وطول القائم الآخر هو البعد بين نقطة الأصل $(0،0)$ والنّقطة $B(1،0)$، أي 1 .

بالاستناد إلى نظريّة فيثاغورس، طول الوتر AB هو $\sqrt{5} = \sqrt{4+1} = \sqrt{2^2+1^2}$.

إذن، طول ضلع المربّع هو $\sqrt{5}$ ، من هنا فإنّ مساحة المربّع هي $5 = \left(\sqrt{5}\right)^2$.

لذلك الإجابة الصّحيحة هي (3).

6. في الرّسم الّذي أمامك ABC هو مُثلّث قائم الزّاوية. BD ينصّف الزّاوية $\sphericalangle ABC$.



بحسب هذه المعطيات ومعطيات الرّسم،
AD = ?

(1) 1 سم
(2) 2 سم
(3) $\sqrt{3}$ سم
(4) $\frac{4}{\sqrt{3}}$ سم

مجموع الزّوايا في المثلّث هو 180° ولذلك $\sphericalangle BAD = 30°$. من المعطى أنّ BD ينصّف الزّاوية $\sphericalangle ABC$ ينتج أنّ $\sphericalangle ABD = 30°$. في المثلّث ADB، $\sphericalangle BAD = \sphericalangle ABD$، ولذلك ADB هو مثلّث متساوي السّاقين فيه AD = BD . BD هو أيضًا وتر في المثلّث BDC . هذا المثلّث هو مثلّث 90° 60° 30°، ولذلك 2 سم = $BD = 2 \cdot CD = 2 \cdot 1$. وبما أنّ AD = BD، فإنّ 2 سم = AD أيضًا، والإجابة الصّحيحة هي (2).

7. سائل يملأ صندوقًا أبعادُهُ: 2 سم، 10سم و 20 سم، سُكب السائل بأكمله في إناء أسطوانيّ الشّكل، نصف قطر قاعدته 5 سم.

إلى أيّ ارتفاع (بالسم) سيصل وجه السّائل في الإناء الاسطوانيّ؟

(1) $\frac{16}{\pi}$

(2) $\frac{40}{\pi}$

(3) 8π

(4) 8

حجم الصّندوق هو حاصل ضرب ثلاثة أبعاده، ولذلك حجم السّائل في الصّندوق هو $2 \cdot 10 \cdot 20$ سم^3، أي 400 سم^3.
بعد سكب السّائل في الإناء الاسطوانيّ، حجم السّائل يبقى كما هو. الآن علينا إيجاد ماذا سيكون ارتفاع اسطوانة نصف قطر قاعدتها 5 سم وحجمها 400 سم^3 – هذا الارتفاع هو الارتفاع الّذي سيصل إليه السّائل في الاسطوانة.
قانون حجم الاسطوانة هو $V = \pi r^2 \cdot h$، ويجب إيجاد h عندما يكون $r =$ 5 سم و $V =$ 400 سم^3.
نعوّض المعطيات في قانون حساب الحجم: $400 = \pi \cdot 5^2 \cdot h = \pi \cdot 25 \cdot h$.
لكي نعزل h، نقسم طرفي المعادلة على 25π ونحصل على $h = \frac{400}{25\pi} = \frac{16}{\pi}$، والإجابة الصّحيحة هي (1).

أسئلة استنتاج من رسم بيانيّ أو من جدول

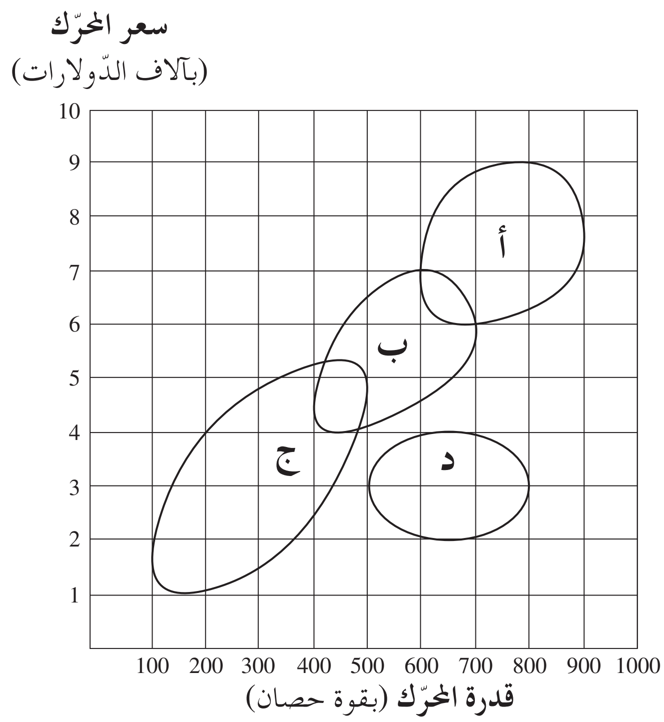
تعالج هذه الأسئلة معلومات معطاة في رسم بيانيّ أو في جدول. يرافق الرّسم البيانيّ أو الجدول عادة شرحٌ مختصرٌ.
في الجدول تُعرض معطيات مرتّبة في أعمدة وأسطر. في الرّسم البيانيّ تُعرض المعطيات بصورة بيانيّة معيّنة – في خطوط، في أعمدة وغيرها. أمامك نموذج لرسم بيانيّ وآخَرَ لجدول، تلي كلًّا منهما بضع أسئلة مرفقة بشروح.

استنتاج من رسم بيانيّ

تمعّن جيّدًا في الرّسم الّذي أمامك، وأجب عن الأسئلة الّتي تليه.

توجد في الرّسم البيانيّ معطيات حول أربع طرق تكنولوجيّة مختلفة لإنتاج محرّك معيّن.
كلّ طريقة تكنولوجيّة مُشار إليها بحرف من الحروف («أ»، «ب»، «ج» و «د») وقد عُرضت في الرّسم البيانيّ بمجال مغلق.
كلّ نقطة داخل هذا المجال تصف قدرة المحرّك وسعره، والّذي يمكن إنتاجه بواسطة الطّريقة التّكنولوجيّة الملائمة.
مثلاً، يمكن بواسطة الطّريقة التّكنولوجيّة «أ» إنتاج محرّك قدرته 750 قوّة حصان بسعر 8,500 دولار، ولكن لا يمكن إنتاج محرّك بنفس القدرة بسعر 5,000 دولار.

ملاحظة: للطّريقتين التّكنولوجيّتين «أ» و «ب» هنالك مجال مشترك، وكذلك للطّريقتين التّكنولوجيّتين «ب» و «ج».



إنتبه: عند الإجابة عن كلّ سؤال، تجاهل معطيات تظهر في الأسئلة الأخرى.

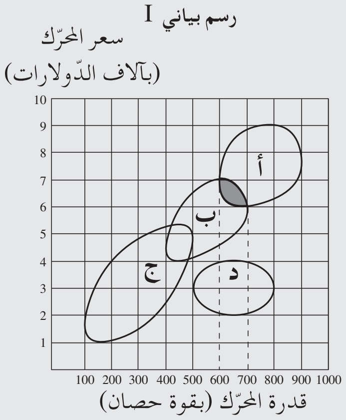
الأسئلة وحلولها :

1. ما مدى قدرات المحرّكات (بقوّة حصان) الّتي يمكن إنتاجها بواسطة الطّريقة التّكنولوجيّة « أ » وأيضًا الطّريقة التّكنولوجيّة « ب »؟

(1) 400 – 500
(2) 500 – 600
(3) 600 – 700
(4) لا توجد إمكانيّة صحيحة من الإمكانيّات أعلاه

لحلّ أسئلة استنتاج من رسم بيانيّ يجب « ترجمة » السّؤال إلى مصطلحات الرّسم البيانيّ، ومن ثمّ إيجاد المعلومات المطلوبة في الرّسم البيانيّ. يتطرّق السّؤال إلى محرّكات يمكن إنتاجها في كلّ من الطّريقة التّكنولوجيّة « أ » والطّريقة التّكنولوجيّة « ب ». هذه المحرّكات عُرضت في الرّسم البيانيّ بواسطة المساحة المشتركة بين المجالين الّذين يمثّلان الطّريقتين التّكنولوجيّتين (المنطقة الغامقة في الرّسم I). الآن يجب إيجاد مدى القدرات لهذه المحرّكات. حدود المساحة الغامقة نسبة إلى المحور الأفقيّ تمثّل مدى قدرات المحرّكات الّتي يمكن إنتاجها بواسطة الطّريقتين التّكنولوجيّتين. كما يتّضح من الرّسم، هذه الحدود هي بين 600 و 700 قوّة حصان، أي أنّ مدى قدرات المحرّكات الّتي يمكن إنتاجها بواسطة كلّ من الطّريقة التّكنولوجيّة « أ » والطّريقة التّكنولوجيّة « ب » هو 600 – 700 قوّة حصان، والإجابة الصّحيحة هي (3).

رسم بياني I

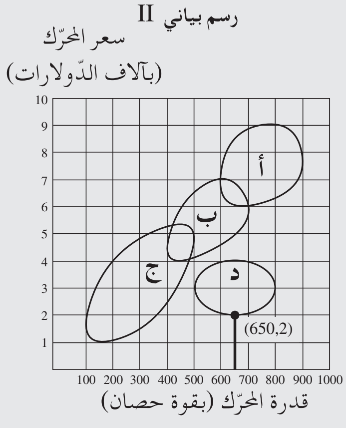


2. ما هو السّعر الأدنى الّذي يمكن به إنتاج محرّك ذي قدرة 650 قوّة حصان؟

(1) 1,000 دولار
(2) 2,000 دولار
(3) 1,500 دولار
(4) 2,500 دولار

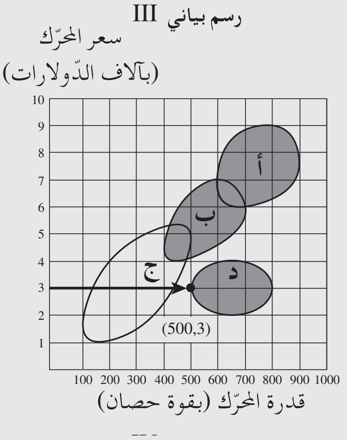
نقطة الانطلاق في هذا السّؤال هي « محرّك ذي قدرة 650 قوّة حصان ». القدرات معروضة في الرّسم البيانيّ على المحور الأفقيّ، لذلك يجب في المرحلة الأولى أن نجد على المحور الأفقيّ قدرة المحرّك المطلوب، وفي المرحلة الثّانية يجب أن نجد السّعر الأدنى لمحرّك بهذه القدرة. نمدّ خطًّا عموديًّا من النّقطة الموجودة على المحور الأفقيّ الّتي تمثّل قدرة 650 قوّة حصان حتى يلتقي مع أحد المجالات (أنظر في الرّسم II). نقطة الالتقاء هذه هي النّقطة الّتي تمثل السّعر الأدنى لمحرّك قدرته 650 قوّة حصان. نقطة الالتقاء الأكثر إنخفاضًا تقع على حدّ مجال الطّريقة التّكنولوجية « د »، وتمثّل السّعر 2,000 دولار، ولذلك فهو السّعر الأدنى لمحرّك بالقدرة المطلوبة. إذن، الإجابة الصّحيحة هي (2).

رسم بياني II



3. في إحدى الشّركات الّتي تنتج محرّكات تَقَرّرَ وقف استعمال الطّريقة التّكنولوجيّة « ج » .
ما هي القدرة الأدنى (بقوّة حصان) لمحرّك سعره 3,000 دولار والّذي تستطيع الشّركة إنتاجه بعد تنفيذ القرار؟

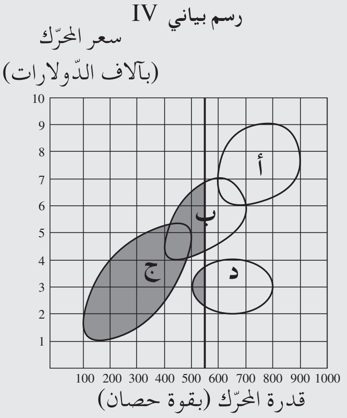
(1) 500
(2) 400
(3) 300
(4) لا يمكن إنتاج محرّك كهذا



بما أنّه ذُكر في السّؤال بأنّ الشّركة ستتوقّف عن استعمال الطّريقة التّكنولوجيّة « ج »، سنتجاهل مجال هذه الطّريقة التّكنولوجيّة، وسنتطرّق فقط إلى المجالات الأخرى (المساحات الغامقة في الرّسم البيانيّ III) . في هذا السّؤال، نقطة الانطلاق هي « محرّك سعره 3,000 دولار » . أسعار المحرّكات معروضة في الرّسم البيانيّ على المحور العموديّ، لذلك في البداية يجب إيجاد النّقطة على المحور العموديّ الّتي تمثّل سعر 3,000 دولار . كلّما اتّجهنا من هذه النّقطة يمينًا تزداد القدرة، لذلك إذا مددنا خطًّا أفقيًا من هذه النّقطة (أنظر في الرّسم III)، فإنّ نقطة الالتقاء الأولى للخطّ مع أحد المجالات تمثّل القدرة **الأدنى** لمحرّك بسعر 3,000 دولار . نقطة الالتقاء الأولى هي مع مجال الطّريقة التّكنولوجيّة « د » . تقع هذه النّقطة على الخطّ العموديّ الملائم لـ 500 قوّة حصان على المحور الأفقيّ، وهذه هي القدرة الأدنى لمحرّك بسعر 3,000 دولار . لذلك فالإجابة الصّحيحة هي (1) .

4. يُحظر على شركة معيّنة إنتاج محرّكات تكون قدرتها أكثر من 550 قوّة حصان .
أيُّ الطّرق التّكنولوجيّة تستطيع الشّركة استعمالها لكي تنتج محرّكاتها؟

(1) « ج » فقط
(2) « ب » و– « ج » فقط
(3) « ج » و– « د » فقط
(4) « ب »، « ج » و– « د » فقط



نقطة الانطلاق هي « محرّك قدرته 550 قوّة حصان » . نجد النّقطة التي تمثّل هذه القدرة على المحور الأفقيّ، ونمدّ منها خطًّا عموديًّا على طول الرّسم البيانيّ كلّه (أنظر في الرّسم IV) . كلّ المحرّكات عن يمين هذا الخطّ هي ذات قدرة أكبر من 550 قوّة حصان، وكلّ المحرّكات عن يسار الخطّ هي ذات قدرة أقلّ من 550 قوّة حصان . للشّركة المذكورة في السّؤال يُسمح إنتاج محرّكات فقط ذات قدرة أقلّ من 550 قوّة حصان، لذلك يمكنها أن تستعمل فقط الطّرق التّكنولوجيّة الّتي مجالها أو جزء من مجالها موجود **عن يسار** الخطّ (المساحات الغامقة في الرّسم IV) . عن يسار الخطّ الممدود، يوجد مجال الطّريقة التّكنولوجيّة « ج » كلّه، جزء من مجال الطّريقة التّكنولوجيّة « ب » وجزء من مجال الطّريقة التّكنولوجيّة « د » . لذلك، تستطيع الشّركة استعمال الطّرق التّكنولوجيّة « ب »، « ج » و– « د » من أجل إنتاج محرّكات تكون قدرتها أقلّ من 550 قوّة حصان، والإجابة الصّحيحة هي (4) .

إستنتاج من جدول

تمعّن جيدًا في الجدول الّذي أمامك، وأجب على الأسئلة الّتي تليه.

توجد في الجدول الّذي أمامك معطيات حول 10 شركات تعمل في مجالات مختلفة. أُشير للشّركات بالأحرف A حتى J .
ذكر لكل شركة: اسم المجال الّذي تعمل فيه، معطيات حول حجم مبيعاتها، معطيات عن أرباحها في السّنة الحالية، قيمة ممتلكاتها وعدد عامليها.
مثلاً: شركة E تعمل في مجال الإلكترونيّات، عدد عامليها 400,000 وقيمة ممتلكاتها 90 مليون دولار. حجم مبيعات الشّركة بلغ في السّنة الحالية 70 مليارد دولار (وهي 9% أكثر من مبيعاتها في السّنة الماضية)، وقد ربحت 6,000 مليون دولار (وهي 60% أكثر من أرباحها في السّنة الماضية).

مثال لحساب النّسبة المئويّة للتّغيير: إذا كانت مبيعات شركة معيّنة 40 مليارد دولار في السّنة السّابقة وارتفعت إلى 50 مليارد دولار في هذه السّنة، تكون النّسبة المئويّة للتّغيير بالنّسبة للسّنة السّابقة 25% $\left(100 \cdot \frac{50-40}{40}\right)$.

اسم الشّركة	المجال	مبيعات: مبيعات (بمليارات الدّولارات)	مبيعات: نسبة التّغيير المئويّة بالنّسبة للسّنة السّابقة	أرباح: أرباح (بملايين الدّولارات)	أرباح: نسبة التّغيير المئويّة بالنّسبة للسّنة السّابقة	قيمة الممتلكات (بملايين الدّولارات)	عدد العمّال (بالآلاف)
A	سيّارات	125	-1.5%	-2,000	-150%	180	750
B	نفط	110	25%	6,500	0%	100	150
C	نفط	105	22%	5,000	40%	390	100
D	سيّارات	100	1.5%	900	-80%	180	350
E	إلكترونيّات	70	9%	6,000	60%	90	400
F	سيّارات	65	7%	3,000	15%	55	100
G	معادن	60	25%	1,000	-20%	لا يوجد معطيات	400
H	نفط	60	20%	3,000	-15%	60	120
I	نفط	55	15%	2,000	7%	40	70
J	إلكترونيّات	50	6%	4,500	10%	150	300

إنتبه: عند إجابتك عن كلّ سؤال، تجاهل المعطيات الّتي تظهر في الأسئلة الأخرى.

الأسئلة وحلولها :

1. أيّ الشّركات الّتي تعمل في مجال السّيّارات هي ذات قيمة الممتلكات **الأقل**؟

(1) A   (2) D   (3) F   (4) A وأيضًا D

في العمود الثّاني من جهة اليمين يظهر المجال الّذي تعمل به كلّ شركة. يمكن رؤية أنّ الشّركات A، D وـ F هي الشّركات الوحيدة الّتي تعمل في مجال السّيّارات. نفحص قيمة الممتلكات (في العمود الثّاني من اليسار) لكلّ واحدة من هذه الشّركات: قيمة ممتلكات شركة A هي 180 مليون دولار، وهي نفس قيمة ممتلكات شركة D أيضًا. قيمة ممتلكات شركة F هي 55 مليون دولار، لذلك فإنّ شركة F هي ذات قيمة الممتلكات الأقلّ في مجال السّيّارات. الإجابة الصّحيحة هي (3).

2. إذا افترضنا أنّ الأرباح تتقسّم بالتّساوي على جميع العاملين في الشّركة، في أي الشّركات التّالية يكون الرّبح للعامل **الواحد** فيها هو الأكبر؟

(1) H   (2) B   (3) C   (4) F

الرّبح للعامل الواحد لم يُذكر في الجدول بشكلٍ واضح، ولكن يمكن حسابه من المعطيات الظّاهرة في الجدول. معطى في الجدول ربح كلّ شركة وكذلك عدد العاملين بها. ربح العامل الواحد في شركة معيّنة يساوي الرّبح للشّركة مقسومًا على عدد العاملين فيها.
في جميع الشّركات، الرّبح معطى بملايين الدّولارات وعدد العمال بالآلاف، ولذلك من أجل المقارنة بين الشّركات يمكننا التّطرق فقط إلى القيم العدديّة الظّاهرة في الجدول، وعرض الرّبح للعامل الواحد كما يلي:

H	B	C	F
$\frac{3,000}{120}$	$\frac{6,500}{150}$	$\frac{5,000}{100}$	$\frac{3,000}{100}$

بالطّبع، يمكننا حساب الرّبح للعامل الواحد وإيجاد في أيّ شركة نحصل على القيمة الأكبر، إلا أنّه يمكن أيضًا المقارنة بين العمليّات الحسابيّة بدون حسابها:
للشّركتين F و H نفس الرّبح (3,000) ولكن في الشّركة F ينقسم على عدد عمال أقل ($120 > 100$)، لذلك فإن الرّبح للعامل في شركة F أكبر.
عدد العمّال في الشّركتين C و F متساوٍ (100)، لكن الرّبح في شركة C أكبر ($5,000 > 3,000$)، لذلك فإن الرّبح للعامل في شركة C أكبر.
الشّركتان B و C مختلفتان من ناحية عدد العمّال وأيضًا من ناحية الرّبح. في الشّركة B عدد العمّال أكبر 1.5 مرّة من عدد العمّال في شركة C (150 مقابل 100)؛ فإذا كان الرّبح أيضًا لشركة B يساوي 1.5 مرّة أرباح شركة C، أي لو كان الرّبح في الشّركة B $7,500 = 1.5 \cdot 5,000$ ، فإن الرّبح للعامل يكون متساويًا في كلتا الشّركتين.
لكن ربح الشّركة B أقلّ من هذا المبلغ ($7,500 > 6,500$)، ولذلك فإن الرّبح للعامل في الشّركة B أقلّ من الرّبح للعامل في الشّركة C. لذلك، يكون الرّبح الأكبر للعامل الواحد هو في شركة C، والإجابة الصّحيحة هي (3).

بالطّبع، يمكننا حساب الرّبح للعامل الواحد في الشّركتين B و C:

الرّبح للعامل الواحد في الشّركة C يساوي 50 $\left(\frac{5,000}{100} = 50\right)$ والرّبح للعامل الواحد في الشّركة B أقلّ من 50 $\left(\frac{6,500}{150} < 50\right)$ ولذلك فإن الرّبح للعامل الواحد في الشّركة C هو الأكبر. والإجابة الصّحيحة هي (3).

3. كم كان حجم المبيعات لشركة G في السّنة الماضية (بمليارات الدّولارات)؟

(1) 48 (2) 50 (3) 64 (4) 76

حجم المبيعات لم يُذكر في الجدول في السّنة الماضية، ولكن يمكن حسابه بواسطة حجم المبيعات في السّنة الحالية والنّسبة المئويّة للتّغيير مقارنة بالسّنة السّابقة. يمكن الملاحظة من الجدول أنّ الشّركة G قد باعت هذه السّنة بمبلغ 60 مليارد دولار، وأنّ مبيعاتها ارتفعت بـ 25% مقارنة بالسّنة السّابقة. أي أنّ حجم مبيعاتها في السّنة السّابقة هو قيمةٌ إذا أضفنا إليها 25% نحصل على 60 مليارد. نشير بـ x إلى حجم المبيعات في السّنة السّابقة، ونعبّر عن المعطيات بالمعادلة:

$x + \frac{25}{100} \cdot x = 60$. نبسّط المعادلة: $\frac{125}{100} \cdot x = 60$ ، ونعزل x: $x = 60 \cdot \frac{100}{125} = 60 \cdot \frac{4}{5} = 48$.

حجم مبيعات الشّركة G في السّنة السّابقة كان 48 مليارد دولار، والإجابة الصّحيحة هي (1).

4. نعرّف حجم مصروفات شركة في سنة معينة هكذا (إقرأ من اليسار):

(حجم الأرباح في نفس السّنة) − (حجم المبيعات في نفس السّنة) = (حجم المصروفات في سنة معيّنة)

في أيّ مجال تعمل الشّركة ذات حجم المصروفات الأكبر في السّنة الحالية؟

(1) سيّارات
(2) نفط
(3) إلكترونيّات
(4) معادن

لأجل حساب حجم مصروفات شركة في السّنة الحالية، يجب طرح حجم الأرباح من حجم المبيعات. في الجدول مُعطى حجم المبيعات بمليارات الدّولارات، بينما حجم الأرباح بملايين الدّولارات. لكي نطرحهما من بعضهما البعض، يجب تحويل كليهما لنفس الوحدات. إذا ضاعفنا حجم المبيعات المسجّل في الجدول بـ 1,000، فسنحصل على حجم المبيعات بملايين الدّولارات.

هكذا مثلاً، حجم مبيعات الشّركة C بملايين الدّولارات هو 105,000. حجم أرباح هذه الشّركة هو 5,000 مليون دولار، ولذلك فإنّ حجم مصروفاتها هو 100,000 مليون دولار. بهذا الشّكل يمكن حساب حجم المصروفات لكلّ الشّركات الّتي تظهر في الجدول، وإيجاد الشّركة ذات أكبر حجم من المصروفات.

لكن يمكن أن نوفّر هذا الحساب: من المعادلة الّتي تعرّف حجم المصروفات ينبع أنّه كلّما ارتفع حجم المبيعات، أو كلّما انخفض حجم الأرباح، فإنّ حجم المصروفات يرتفع. لذلك ثمّة سبب وجيه لأن نفحص أوّلاً الشّركات ذات أحجام المبيعات الأكبر أو أحجام الأرباح الأصغر. من خلال التّمعّن في الجدول يمكن رؤية أنّ الشّركة A هي أيضًا الشّركة ذات حجم المبيعات الأكبر وهي ايضًا الشّركة ذات حجم الأرباح الأصغر (هي الوحيدة ذات حجم أرباح سالب، أي أنّها في الواقع قد خسرت)، ولذلك فهي بالتّأكيد ذات حجم المصروفات الأكبر. الفرع الذي تعمل فيه الشّركة A هو سيّارات، ولذلك فالإجابة الصّحيحة هي (1).